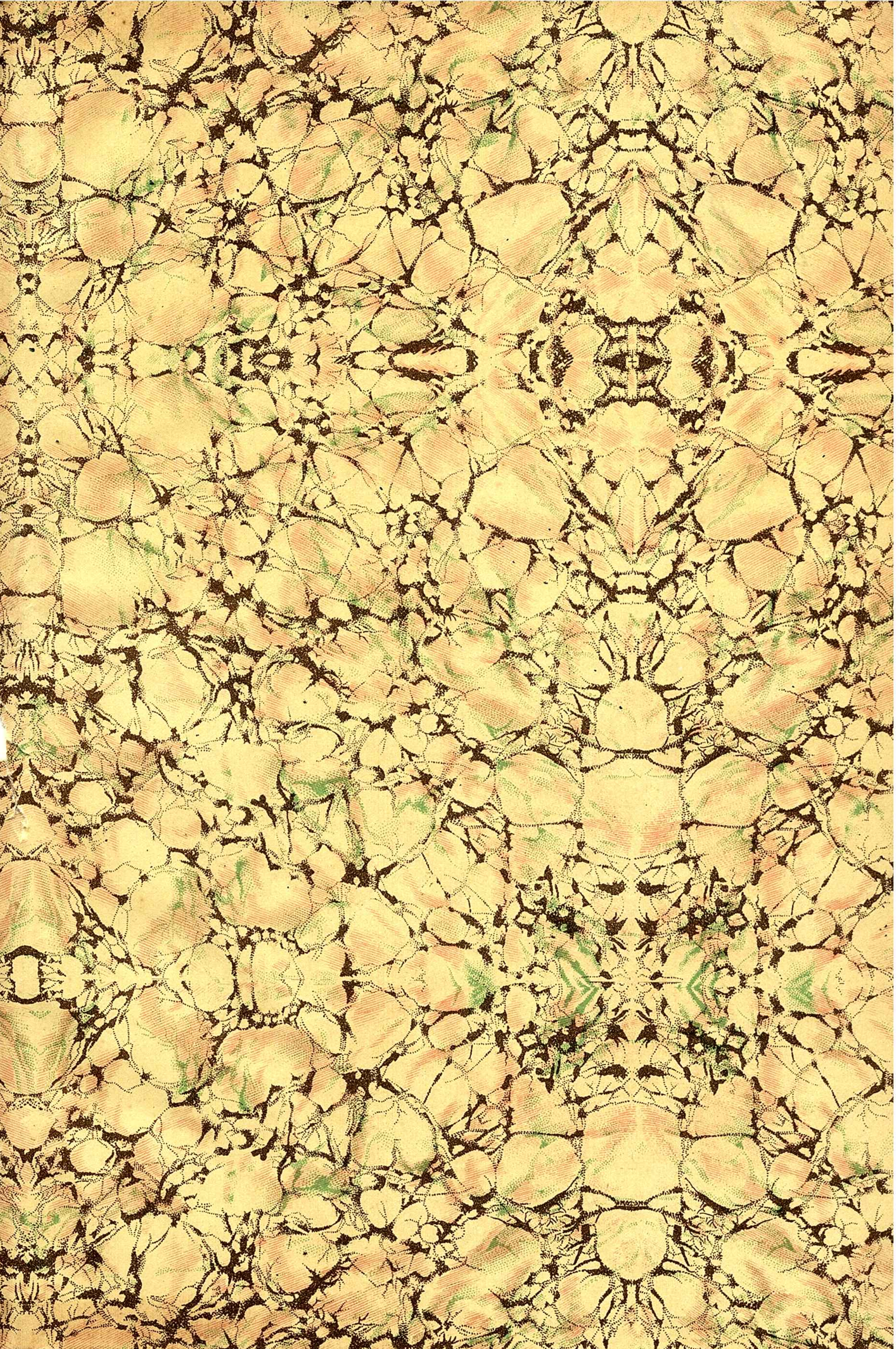




Para mi estimado amigo y colaborador, Ing. H.
muy cordialmente

S. GERSZONOWICZ

DIRECTOR DEL INSTITUTO DE ELECTROTÉCNICA
DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE MONTEVIDEO

GALVANÓMETROS Y OSCILÓGRAFOS

TOMO I

GALVANÓMETROS

MONTEVIDEO
R. O. del URUGUAY
1 9 4 3

DEL MISMO AUTOR:

UNIDADES ELÉCTRICAS Y FOTOMÉTRICAS

MONTEVIDEO 1941.

●

GALVANÓMETROS Y OSCILÓGRAFOS

TOMO I

GALVANÓMETROS

GALVANÓMETROS Y OSCILÓGRAFOS

CAPITULO I.

Definición del galvanómetro. Propiedades generales. Estudio del movimiento.

1. Definición del galvanómetro. — En el lenguaje corriente se da el nombre de galvanómetro a la mayoría de los aparatos susceptibles de medir o aún acusar una pequeña corriente, tales como p. ej. los aparatos electromagnéticos de cuadro o imán móvil, térmicos, de inducción, etc. No obstante no se llaman corrientemente "galvanómetros" algunos aparatos, como ser ciertos electrodinamómetros, aún cuando midan una pequeña corriente. La expresión "pequeña corriente" no es precisa, de modo que no hay límite bien definido entre los galvanómetros y p. ej. los miliamperímetros, aunque se reserve preferentemente el nombre de galvanómetro a los aparatos sin graduación directa. Observemos que a veces se da el nombre de "galvanómetros" a aparatos construídos para la medida de otras magnitudes, tales como p. ej. el coeficiente de self - inducción, pero cuyo principio es el del galvanómetro propiamente dicho, sirviendo para la medida de la intensidad de la corriente.

Si nos referimos al vocabulario electrotécnico (1929) propuesto por el Comité Electrotécnico Francés (C. E. F.), encontramos (publicación C - 1 de l'Union des Syndicats de l'Electricité, U. S. E.):

electrodinamómetro — aparato que utiliza la acción electrodinámica de un circuito sobre otro, o de dos partes de un mismo circuito entre sí, con el fin de medir diversas magnitudes eléctricas, corriente, tensión, potencia.

galvanómetro — aparato de medida cuyas indicaciones son función de la corriente que lo atraviesa.

Se observará que la definición de galvanómetro del C. E. F., que se ha querido tan general y conforme al uso corriente como sea posible, no hace distinciones ni según la naturaleza ni según el orden de magnitud de la cantidad a medir.

La publicación C - 28 de la U. S. E. menciona que se reservan los nombres de galvanómetro y de electrómetro a los aparatos de medida de laboratorio destinados a la medida de cantidades muy pequeñas.

Si nos referimos ahora al vocabulario electrotécnico internacional (1938), versión castellana por el Comité Electrotécnico Argentino (1939), leemos:

galvanómetro — aparato destinado a la medida de corrientes, generalmente muy pequeñas.

Las definiciones anteriores no nos parecen completamente satisfactorias; sería posible aumentar su precisión sin sacrificar en nada su generalidad.

Estudiaremos aquí bajo el nombre de galvanómetros todos los aparatos indicadores, comprendidos los electrodinamómetros, construídos de manera de poder medir y con mayor razón revelar [1] ya sea el menor valor de corriente (continua o alterna) que permite el principio mismo de su funcionamiento, ya sea corrientes más importantes, pero que en ningún caso excedan del orden de un miliamperio.

Generalmente se conserva el principio de funcionamiento de los galvanómetros para la construcción de los aparatos de medida de corrientes más fuertes; así que el estudio que haremos aquí servirá al mismo tiempo de base para el de los aparatos industriales.

Los galvanómetros podrán evidentemente utilizarse para la determinación de cualquier otra magnitud cuya medida se reduzca a la de la corriente. Como ya lo hemos dicho, se reserva en general el nombre de galvanómetro a los aparatos no graduados directamente; aunque ciertos aparatos graduados directamente, como p. ej. algunos milivóltmetros, responden por sus características de sensibilidad a la definición del galvanómetro como aparato que sirve para medir pequeñas corrientes.

(1) en este caso los aparatos deberían tomar el nombre de galvanoscopios.

Observemos también que el movimiento del galvanómetro estará en muchos casos influenciado por la naturaleza del circuito de medida, mientras que se trata de evitar esta influencia en los aparatos industriales.

Algunos galvanómetros permiten aplicaciones especiales, como p. ej. la medida de una cantidad de electricidad; el galvanómetro toma entonces el nombre de balístico.

Se construyen galvanómetros que presentan características diversas de manera que den los mejores resultados posibles en cada caso particular de su aplicación; pero cualesquiera que sean estas características, todos estos aparatos obedecen a ciertas leyes comunes que vamos a estudiar en primer lugar.

2. Ecuación del movimiento. — Los galvanómetros, igual que todos los otros aparatos indicadores o registradores, comprenden siempre un órgano fijo y un órgano móvil, entre los que se ejerce la acción (par, fuerza) función de la corriente a determinar. Sea C_m el par motor (o fuerza) que tiende a apartar el móvil del "cero", es decir, de su posición de equilibrio en ausencia de corriente. Veremos más adelante como se produce este par y como se le calcula.

Salvo excepción, el órgano móvil es siempre llamado al cero por un par (o fuerza) director, C_d. Admitamos, sin perjuicio de introducir restricciones más adelante, que cualquiera que sea la manera de producir este par, éste es siempre proporcional al ángulo de desviación (o al desplazamiento) del órgano móvil, Θ:

$$C_d = C\,\Theta$$

siendo la constante C el par director por unidad de ángulo.

Por el hecho del movimiento del órgano móvil hay que considerar un par (o fuerza) de amortiguamiento, C_a. Aquí también, con la reserva de introducir restricciones más adelante, supondremos que cualquiera que sea la naturaleza del amortiguamiento, C_a es proporcional a la velocidad angular (o lineal) de desplazamiento del órgano móvil:

$$C_a = A\,\frac{d\Theta}{dt}$$

en que A es el coeficiente de amortiguamiento.

Sea K el momento de inercia del órgano móvil; la ecuación del movimiento se escribe

$$K \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = C_m - C_d - C_a \qquad (1)$$

o sea

$$K \frac{d^2\Theta}{dt^2} + A \frac{d\Theta}{dt} + C\Theta = C_m \qquad (2)$$

o aún, dividiendo por K, lo que, al reducir el número de parámetros de la ecuación sin segundo miembro, facilitará su estudio

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + 2\, b \frac{d\Theta}{dt} + w_o{}^2\, \Theta = \frac{C_m}{K} \qquad (3)$$

poniendo

$$\frac{A}{2\, K} = b \qquad (4)$$

y

$$\frac{C}{K} = w_o{}^2 \qquad (5)$$

El término b caracteriza el amortiguamiento; el significado físico de w_o es igualmente inmediato: sería la pulsación propia del órgano móvil si el amortiguamiento fuera nulo. En efecto, se tendría entonces

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + w_o{}^2\, \Theta = 0$$

ecuación cuya solución es

$$\Theta = \Theta_{max}\; sen\, (w_o\, t + \varphi) \qquad (6)$$

dependiendo Θ_{max} y φ de las condiciones iniciales.

Pongamos

$$T_o = \frac{1}{f_o} = \frac{2\, \pi}{w_o} \qquad (7)$$

Definimos así el período T_o y la frecuencia f_o propios del órgano móvil, *en ausencia de todo amortiguamiento.* Es evidente que T_o es una magnitud sin existencia real, pues la supresión total

del amortiguamiento es fisicamente imposible, pero es un auxiliar precioso; lo llamaremos "período ideal", así como a w_o, pulsación ideal, y a f_o, frecuencia ideal.

Se puede finalmente, gracias a un cambio de variables adecuado, modificar aún la ecuación fundamental, de manera de no hacer intervenir más que un solo parámetro en su primer miembro. Hagamos

$$\tau = w_o\, t \tag{8}$$

resulta

$$w_o^{\,2} \frac{d^2\Theta}{d\tau^2} + 2\, b\, w_o \frac{d\,\Theta}{d\,\tau} + w_o^{\,2}\, \Theta = \frac{C_m}{K}$$

o sea dividiendo por $w_o^{\,2}$

$$\frac{d^2\Theta}{d\tau^2} + 2\alpha \frac{d\Theta}{d\tau} + \Theta = \frac{C_m}{K w_o^{\,2}} \tag{9}$$

con

$$\alpha = \frac{b}{w_o} = \frac{A}{2\sqrt{K\,C}} \tag{10}$$

α ha recibido el nombre de grado de amortiguamiento.

La nueva variable τ es sin dimensiones; para $t = T_o$ $\tau = 2\,\pi$.

El par motor C_m es en principio función de Θ y de t, pero bajo ciertas condiciones, generalmente realizadas en los galvanómetros, no depende más que de t.

Hacemos pues

$$C_m = F\,(t) = F\left(\frac{\tau}{w_o}\right)$$

lo que permite escribir

$$K \frac{d^2\Theta}{dt^2} + A \frac{d\Theta}{dt} + C\,\Theta = F\,(t) \tag{11}$$

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + 2b \frac{d\Theta}{dt} + w_o^{\,2}\,\Theta = \frac{F(t)}{K} = f\,(t) \tag{12}$$

o

$$\frac{d^2\Theta}{d\tau^2} + 2\alpha\frac{d\Theta}{d\tau} + \Theta = \frac{F\left(\frac{\tau}{w_o}\right)}{K w_o{}^2} = \varphi(\tau) \qquad (13)$$

La solución general de (11), (12) o (13) se obtiene sumando a la solución general de esta ecuación sin segundo miembro, una solución particular de la ecuación con segundo miembro. La solución sin segundo miembro, relativa al movimiento en el caso en que ninguna fuerza exterior obre sobre el sistema, determina el movimiento propio (o libre) de este último. La solución particular con segundo miembro determina el movimiento forzado del sistema, que dura lo que dura la fuerza exterior. El movimiento resultante es la superposición de los dos anteriores; como el primero se extingue siempre a causa del amortiguamiento, al cabo de un tiempo suficiente queda solo el segundo: se dice que se há alcanzado el estado estacionario (o el régimen permanente); el intervalo de tiempo durante el cual coexisten ambos se llama estado o régimen transitorio. Empezaremos por el estudio del movimiento propio, característico del aparato e independiente de la fuerza exterior que actúa, examinando después los movimientos estacionario y transitorio en algunos casos particulares.

3. **Analogías mecánicas y eléctricas.** — El interés del estudio que sigue no se limita solamente al caso de los aparatos de medidas eléctricas. Permaneciendo en el dominio de la mecánica, se encuentra la misma ecuación (11) en gran número de problemas como p. ej. oscilaciones de máquinas eléctricas, equilibrado de rotores, etc. Pero hay más: se sabe que un circuito eléctrico que comprende en serie una resistencia R, una self - inducción L y una capacidad C, sometida a una ddp V cualquiera, obedece en cada instante a la ecuación

$$V - L\frac{di}{dt} = Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

en que i es la corriente, o sea a

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V$$

introduciendo la cantidad de electricidad $q = \int i\,dt$. La

ecuación obtenida es matematicamente idéntica a la (11): el coeficiente de self desempeña el papel de la inercia; la resistencia el del coeficiente de amortiguamiento, la inversa de la capacidad el del par director unitario, la ddp exterior el del par motor, la cantidad de electricidad el de la desviación angular, etc. Recomendamos al lector que compare los resultados del estudio relativo a los galvanómetros que hacemos en este capítulo y en los VII y XI, con los de los casos eléctricos correspondientes, que encontrará desarrollados en los numerosos tratados de electrotécnica, especialmente en las clásicas "Leçons d'électrotechnique générale" de P. Janet y obras de A. Blondel, J. Fallou, A. Mauduit, R. Mesny, C. P. Steinmetz, etc. En español indicamos particularmente "Oscilaciones eléctricas" de M. Simonoff.

4. Movimiento propio del sistema. Influencia del grado de amortiguamiento. — Consideraremos la ecuación fundamental ya sea bajo la forma (11), ya sea bajo la (12) o aún la (13), haciendo uso respectivamente de las notaciones A, C, K — b, w_o — α, según que sean más o menos cómodas, pero especialmente para habituar al lector a manejarlas todas, porque todas se emplean por diferentes autores según el país; observemos con todo que la forma (13), la más reciente, presenta en numerosos casos reales ventajas.

Partamos de la forma (12), que conserva el tiempo como variable, sin perjuicio de expresar después los resultados con las otras notaciones.

Se tiene

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + 2b\frac{d\Theta}{dt} + w_o{}^2\,\Theta = 0 \qquad (14)$$

Las raíces de la ecuación característica

$$x^2 + 2\,b\,x + w_o{}^2 = 0$$

son

$$x = -\,b \pm \sqrt{b^2 - w_o{}^2}$$

Distinguiremos tres casos.

Supongamos primero b diferente de w_o:

$$b \lesseqgtr w_o \text{, o sea } A^2 \gtreqless 4\,K\,C \text{, o aún } \alpha \gtreqless 1 .$$

Hagamos

$$b' = \sqrt{b^2 - w_o^{\,2}} = w_o \sqrt{\alpha^2 - 1} \qquad (15)$$

siendo b' real o imaginario según que b sea superior o inferior a w_o. La solución es:

$$\Theta = e^{-bt} \left\{ M\,e^{b't} + N\,e^{-b't} \right\} \qquad (16)$$

de donde

$$\frac{d\Theta}{dt} = e^{-bt} \left\{ (-b + b')\,M e^{b't} + (-b - b')\,N e^{-b't} \right\} \qquad (17)$$

Las constantes M y N están determinadas por las condiciones iniciales. Hagamos

$$t = 0 \qquad \Theta = \Theta_o \qquad \frac{d\Theta}{dt} = v_o$$

en (16) y (17), y resolvamos respecto a M y N:

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{\Theta_o (b' + b) + v_o}{2\,b'} \\ N &= \frac{\Theta_o (b' - b) - v_o}{2\,b'} \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Hay que distinguir según que $b > w_o$ o $b < w_o$.

I) $b > w_o$, o sea $\alpha > 1$; b' es real.

Llevemos los valores de M y N a (16), y recordando que

$$sh\, b't = \frac{e^{b't} - e^{-b't}}{2} \quad \text{y} \quad ch\, b't = \frac{e^{b't} + e^{-b't}}{2}$$

resulta

$$\Theta = \frac{1}{b'}\, e^{-bt} \left\{ \Theta_o\, b'\, ch\, b't + (\Theta_o b + v_o)\, sh\, b't \right\} \qquad (19)$$

y

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{b'} e^{-bt} \left\{ b' v_o \, ch \, b't - (w_o{}^2 \, \Theta_o + b v_o) \, sh \, b't \right\} \qquad (20)$$

II) $b < w_o$, o sea $\alpha < 1$; b' es imaginario. Pongamos

$$b' = j \, b'' \quad \text{con } b'' = \sqrt{w_o{}^2 - b^2} = w_o \sqrt{1 - \alpha^2} \qquad (21)$$

Hagamos $b' = j \, b''$ en (18) y (16), y llevemos a esta última los valores de M y N así transformados; recordando que

$$sen \, b''t = \frac{e^{j b''t} - e^{-j b''t}}{2j} \quad \text{y} \quad cos \, b''t = \frac{e^{j b''t} + e^{-j b''t}}{2}$$

resulta

$$\Theta = \frac{1}{b''} e^{-bt} \left\{ \Theta_o \, b'' \, cos \, b''t + (\Theta_o \, b + v_o) \, sen \, b''t \right\} \qquad (22)$$

y

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{b''} e^{-bt} \left\{ b'' \, v_o \, cos \, b''t - (w_o{}^2 \, \Theta_o + b \, v_o) \, sen \, b''t \right\} \qquad (23)$$

III) Supongamos ahora $b = w_o$, o sea $A^2 = 4 \, KC$, o $\alpha = 1$. Se tiene entoncess $b' = 0$; las raíces de la ecuación característica son iguales. La solución es

$$\Theta = e^{-bt} (M + Nt) \qquad (24)$$

de donde

$$\frac{d\Theta}{dt} = e^{-bt} \left\{ - b \, M + (1 - bt) \, N \right\} \qquad (25)$$

Las condiciones iniciales $t = 0$, $\Theta = \Theta_o$, $\dfrac{d\Theta}{dt} = v_o$ dan

$$\left. \begin{aligned} M &= \Theta_o \\ N &= v_o + \Theta_o \, b \end{aligned} \right\} \qquad (26)$$

de donde

$$\Theta = e^{-bt} \left\{ \Theta_0 + (v_0 + \Theta_0 b)\, t \right\} \tag{27}$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = e^{-bt} \left\{ v_0 - (v_0 + \Theta_0 b)\, b\, t \right\} \tag{28}$$

5. Movimiento propio. Influencia de las condiciones iniciales. — Vamos ahora a examinar más detenidamente el movimiento en cada caso particular.

I) $b > w_0$, $a > 1$: el movimiento es aperiódico.

La relación (19) puede ponerse bajo una forma más elegante, que varía sin embargo según los valores de Θ_0 y v_0. Nos bastará suponer $\Theta_0 > 0$; en el caso en que $\Theta_0 < 0$ la discusión se hace de la misma manera y las curvas $\Theta(t)$ obtenidas son simétricas con relación al eje de abcisas de las que vamos a establecer. Dicho esto supongamos que

$$\left.\begin{array}{ll} & v_0 > - \Theta_0 (b - b') \\ \text{o} & v_0 < - \Theta_0 (b + b') \end{array}\right\} \tag{29}$$

Se puede entonces escribir

$$-1 < \frac{\Theta_0 b'}{\Theta_0 b + v_0} = th\, \varphi < 1 \tag{30}$$

y, transformando (19)

$$\Theta = \pm \frac{\sqrt{(\Theta_0 b + v_0)^2 - (\Theta_0 b')^2}}{b'} e^{-bt} sh\,(b't + \varphi) \tag{31}$$

tomándose el signo + si $v_0 > - \Theta_0 (b - b')$ y el signo — si $v_0 < - \Theta_0 (b + b')$.

Consideremos la ecuación (31). La derivada $\frac{d\Theta}{dt}$ se anula para $t = t_m$ tal que

$$th\,(b' t_m + \varphi) = \frac{b'}{b} \tag{32}$$

o sea, teniendo en cuenta (30), para

$$th\, b' t_m = \frac{b' v_0}{w_0^2 \Theta_0 + b v_0} \tag{33}$$

Se obtiene el valor de la elongación haciendo $t = t_m$ en (31):

$$\Theta_{\substack{max\\min}} = \pm \frac{\sqrt{(\Theta_o b + v_o)^2 - (\Theta_o b')^2}}{w_o} e^{-bt_m} \tag{34}$$

tomándose el signo $+$ o $-$ según que se trate de un máximo $[v_o \geqq 0]$ o de un mínimo $[v_o < -\Theta_o (b + b')]$.

Veamos los diferentes casos posibles según el valor de v_o:

a) $v_o > 0, \frac{d\Theta}{dt} > 0$ si $t < t_m$ y $\frac{d\Theta}{dt} < 0$ si $t > t_m$: el móvil pasa por un máximo y vuelve al cero (fig. 1 a).

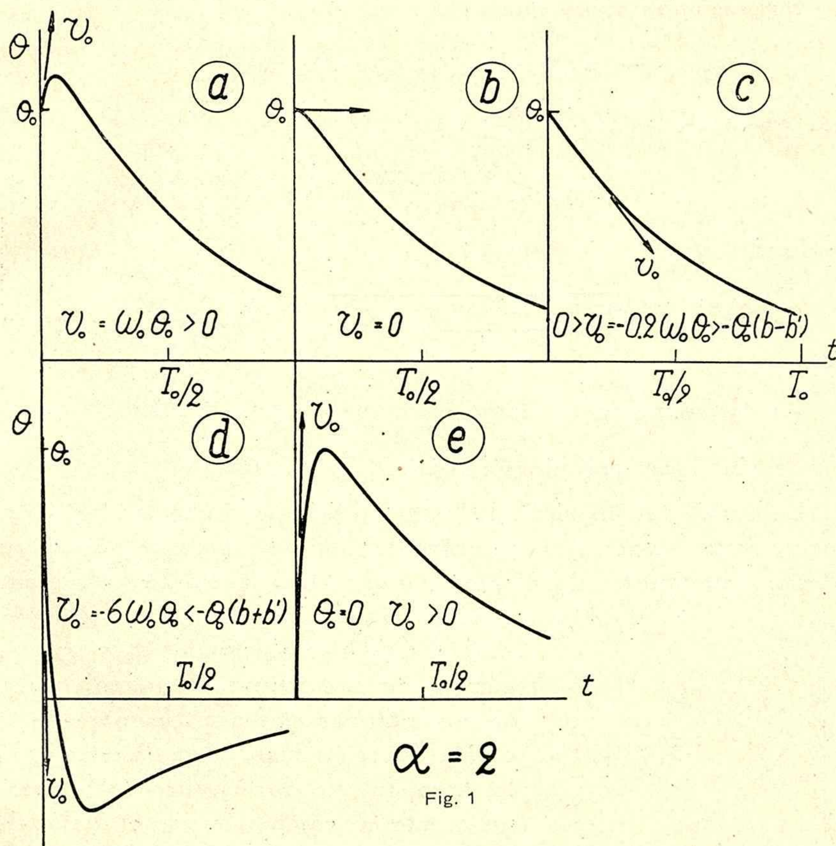


Fig. 1

b) $v_o = 0$: el máximo tiene lugar en el instante inicial (fig. 1 b).

c) $-\Theta_o (b - b') < v_o < 0$; $\frac{d\Theta}{dt}$ es constantemente negativa,

la desviación tiende a cero sin pasar por un máximo o un mínimo (fig. 1c).

d) $v_o < - \Theta_o (b+b')$; $\frac{d\Theta}{dt} < 0$ para $t < t_m$ y $\frac{d\Theta}{dt} > 0$ para $t > t_m$: el móvil sobrepasa la posición de equilibrio, llega a un mínimo y vuelve al cero (fig. 1d).

En el caso particular en que $\Theta_o = 0$ la ecuación (31) sigue siendo válida; la curva del movimiento, suponiendo $v_o > 0$, está dada por la fig. 1e.

Supongamos ahora que

$$- \Theta_o (b+b') < v_o < - \Theta_o (b-b') \tag{35}$$

será necesario poner

$$- 1 < \frac{\Theta_o b + v_o}{\Theta_o b'} = th\, \varphi < 1 \tag{36}$$

de donde

$$\Theta = \frac{\sqrt{(\Theta_o b')^2 - (\Theta_o b + v_o)^2}}{b'} e^{-bt} ch\, (b't + \varphi) \tag{37}$$

La derivada $\frac{d\Theta}{dt}$ es constantemente negativa, el móvil vuelve al cero sin pasar por ningún máximo ni mínimo.

La curva del movimiento está representada en la fig. 2; su aspecto es semejante al de la curva de la fig. 1c, pero las dos curvas no son reductibles. En efecto, veremos más adelante [16] que si se realiza la condición (29), cualesquiera que sean los valores de Θ_o y v_o, las curvas de movimiento pueden hacerse coincidir gracias a un cambio de la escala de ordenadas, una translación a lo largo del eje de las abscisas y eventualmente un cambio de signo; dicho de otro modo, las cinco curvas de la fig. 1 aparecerán como porciones diferentes de una curva única. Ahora, si es la condición (35) la que se cumple, la infinidad de curvas que corresponden a los

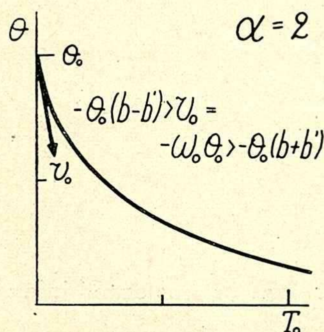


Fig. 2

diversos valores de Θ_o y v_o relacionados solamente por la relación (35), pueden considerarse como otras tantas porciones de una curva única, pero las dos curvas únicas, a considerar según que sea aplicable (29) o (35), no son reductibles unas a otras.

Es necesario también considerar aparte los casos en que $v_o = - \Theta_o (b + b')$ o $v_o = - \Theta_o (b - b')$, valores que anulan una u otra de las constantes M y N de la expresión general (18): las ecuaciones del movimiento son entonces

$$v_o = - \Theta_o (b + b') \qquad M = o \qquad \Theta = \Theta_o e^{(-b-b')t} \qquad (38)$$

$$v_o = - \Theta_o (b - b') \qquad N = o \qquad \Theta = \Theta_o e^{(-b+b')t} \qquad (39)$$

En los dos casos, la derivada $\frac{d\Theta}{dt}$ es constantemente negativa, el móvil vuelve al cero sin acusar ningún máximo o mínimo, pero las dos curvas no son reductibles por las transformaciones indicadas más arriba ni entre ellas ni a las de las fig. 1c o 2 que presentan un aspecto semejante; sin embargo se reducen una a otra por cambio de la escala de abscisas.

Caso particular: $C = o, \quad b = b', \quad w_o = o.$

En el estudio hecho hemos supuesto implicitamente que los coeficientes de la ecuación diferencial (14) eran constantes, reales, finitos y no nulos. Sin embargo, un caso interesante es aquel en que $C = o = w_o$; el movimiento es aperiódico ($\alpha = \infty$). Como no hay par director el móvil está en equilibrio indiferente en cualquier posición.

La ecuación del movimiento se escribe pues, transformando (19)

$$\Theta - \Theta_o = \frac{v_o}{2b} \left(1 - e^{-2bt} \right) \qquad (40)$$

donde Θ_o caracteriza la posición primitiva de equilibrio tomada con relación a un origen de ángulos cualquiera; es evidente que se puede hacer $\Theta_o = o$.

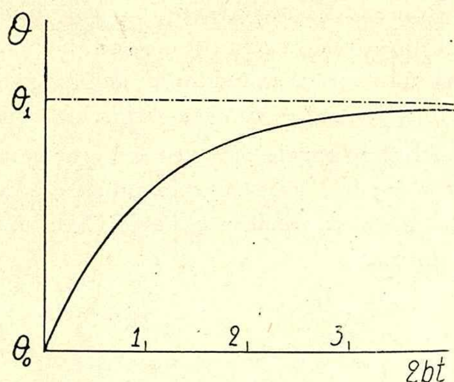


Fig. 3

El móvil tiende según la ley exponencial (40) hacia su nueva posición de equilibrio Θ_1 (fig. 3); la desviación final es

$$\Theta_1 - \Theta_o = \Theta_{max} = $$

$$= \frac{v_o}{2b} = \frac{v_o K}{A} \qquad (41)$$

Este caso ha tenido una aplicación interesante en el flúxmetro.

II) $b < w_o$, $\alpha < 1$: el movimiento es periódico amortiguado.

Se puede poner, cualesquiera que sean los valores de Θ_o y v_o:

$$tg\, \varphi = \frac{\Theta_o\, b''}{\Theta_o\, b + v_o} \qquad (42)$$

La ecuación (22) puede entonces ponerse bajo la forma

$$\Theta = \frac{\sqrt{(\Theta_o b + v_o)^2 + (\Theta_o b'')^2}}{b''} e^{-bt} sen\,(b''\, t + \varphi) \qquad (43)$$

La derivada $\frac{d\Theta}{dt}$ se anula para $t = t_m$ tal que

$$tg\,(b''\, t_m + \varphi) = \frac{b''}{b} \qquad (44)$$

o sea aún, teniendo en cuenta (42), para

$$tg\, b''\, t_m = \frac{b''\, v_o}{w_o^{\,2}\, \Theta_o + b\, v_o} \qquad (45)$$

Pongamos

$$\gamma = \text{el menor } arctg \frac{b''\, v_o}{w_o^{\,2}\, \Theta_o + b\, v_o} \qquad (46)$$

Las elongaciones sucesivas, alternativamente positivas y negativas, como lo muestra la relación (43), tienen lugar para

$$b'' t_m = \gamma + n\pi, \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Es fácil hacer la discusión de γ. Supongamos $\Theta_o > 0$; en tanto que

$$v_o \geqq 0 \qquad 0 \leqq \gamma < \text{el menor } arctg \frac{b''}{b} = \varepsilon < \frac{\pi}{2}$$

la primera elongación es positiva. Cuando

$$\frac{-w_o^{\,2}\,\Theta_o}{b} \leqq v_o < 0 \qquad \frac{\pi}{2} \leqq \gamma < \pi$$

la primera elongación es negativa, y finalmente para

$$v_o < \frac{-w_o^{\,2}\,\Theta_o}{b} \qquad \frac{\pi}{2} > \gamma > \varepsilon$$

la primera elongación es negativa.

Las elongaciones sucesivas están siempre separadas por

$$\frac{\pi}{b''} = \frac{T}{2} \tag{47}$$

en que T, que separa dos elongaciones del mismo signo, es el período propio del movimiento periódico amortiguado, llamado también pseudo-período; b'' es la pulsación correspondiente. Se tiene

$$T = \frac{2\pi}{b''} = \frac{2\pi}{\sqrt{w_o^{\,2} - b^2}} = \frac{2\pi}{w_o\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{T_o}{\sqrt{1-\alpha^2}} \tag{48}$$

El pseudo-período aumenta con el amortiguamiento.

La elongación de orden n se obtiene haciendo en la ecuación (43)

$$t = t_{mn} = \frac{\gamma + n\pi}{b''}$$

Resulta inmediatamente, teniendo en cuenta (44), que la primera elongación es en valor absoluto:

$$|\Theta_1| = |\Theta_{max}| = \frac{\sqrt{(\Theta_o b + v_o)^2 + (\Theta_o b'')^2}}{w_o} e^{-bt_{m1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(\Theta_o b + v_o)^2 + (\Theta_o b'')^2}}{w_o} e^{-b\frac{\gamma}{b''}} \qquad (49)$$

mientras que la elongación de orden n es, también en valor absoluto:

$$|\Theta_n| = \frac{\sqrt{(\Theta_o b + v_o)^2 + (\Theta_o b'')^2}}{w_o} e^{-b\left(\frac{\gamma + n\pi}{b''}\right)} \qquad (50)$$

La relación de los valores absolutos de dos elongaciones sucesivas de cualquier orden es pues

$$k = \frac{|\Theta_1|}{|\Theta_2|} = \frac{|\Theta_k|}{|\Theta_{k+1}|} = e^{\frac{\pi b}{b''}} = e^{\lambda} \qquad (51)$$

poniendo

$$\lambda = \frac{\pi b}{b''} = \frac{b\,T}{2} = log_e\, k = log_e \frac{|\Theta_1|}{|\Theta_2|} = \frac{1}{m} log_e \frac{|\Theta_n|}{|\Theta_{n+m}|} \qquad (52)$$

λ se llama "decremento logarítmico" de las oscilaciones. Observemos que numerosos autores designan por λ al logaritmo de la relación entre dos oscilaciones sucesivas *del mismo signo*, o sea

$$\lambda = log_e \frac{\Theta_1}{\Theta_3} = log_e \frac{\Theta_n}{\Theta_{n+2}} = \frac{2\pi b}{b''} = b\,T \qquad (52a)$$

Conservaremos la primera definición. Se tiene evidentemente

$$\lambda = \frac{\pi b}{b''} = \frac{\pi \alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \qquad (53)$$

de donde

$$\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \qquad (54)$$

Para precisar mejor el movimiento, tenemos ahora que buscar los instantes t_{on} en que el móvil pasa por cero. Haciendo $\Theta = 0$ la ecuación (43) da inmediatamente

$$b'' \, t_{on} = n \, \pi - \varphi \tag{55}$$

en la que

$$\varphi = \text{el menor } arctg \frac{\Theta_o \, b''}{\Theta_o \, b + v_o} \tag{56}$$

Si $v_o \geqq o$, $\varphi \leqq \varepsilon =$ el menor $arctg \dfrac{b''}{b}$; si $- \Theta_o b \leqq v_o < o$, $\varepsilon < \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$; si $- \dfrac{w_o{}^2 \, \Theta_o}{b} \leqq v_o < - \Theta_o b$, $\dfrac{\pi}{2} < \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon$ y finalmente si $v_o < - \dfrac{w_o{}^2 \, \Theta_o}{b}$, $\dfrac{\pi}{2} + \varepsilon < \varphi < \pi$. Considerando la discusión de φ y la de γ hecha más arriba (pág. 15) se observará que $\varphi + \gamma = \varepsilon$ si $v_o \geqq o$ mientras que $\varphi + \gamma = \varepsilon + \pi$ si $v_o < o$.

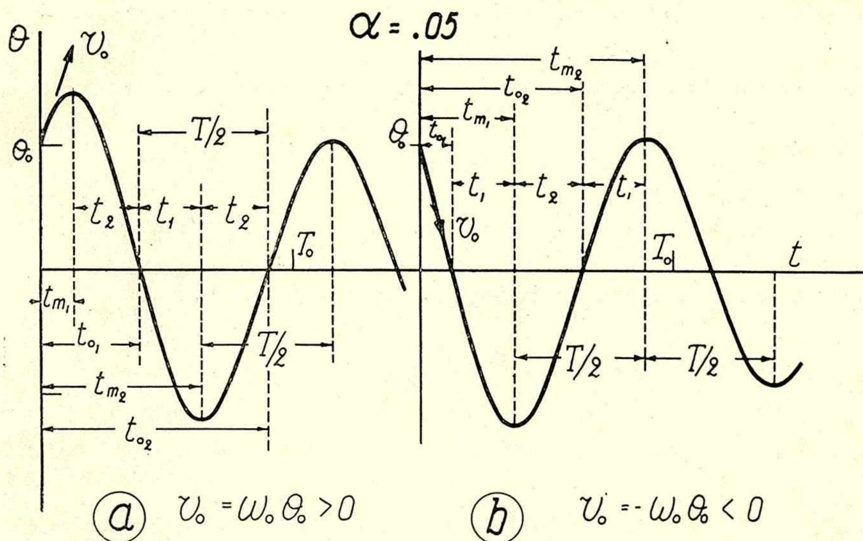


Fig. 4

De acuerdo con (55) dos pasajes sucesivos por cero están separados, como dos elongaciones sucesivas, por un semi - pseudo - período $\dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi}{b''}$.

Es sin embargo inmediato que, salvo en el caso teórico de $\alpha = o$, los intervalos de tiempo que separan una elongación de los pasajes por cero que la rodean no son iguales. Pero antes de considerar este punto veamos los diferentes movimientos que pue-

den tener lugar según los valores de Θ_0 y v_0. Nos bastará evidentemente suponer $\Theta_0 > 0$.

Si $v_0 > 0$, la desviación empieza por crecer, alcanza el primer máximo al cabo de $t_{m1} = \frac{\gamma}{b''}$, disminuye, pasa por cero al cabo de $t_{01} = \frac{\pi - \varphi}{b''}$, se hace negativa, pasa por un mínimo para $t_{m2} = \frac{\gamma + \pi}{b''}$, vuelve a pasar por cero para $t_{02} = \frac{2\pi - \varphi}{b''}$ y así sucesivamente (fig. 4a).

Si $v_0 = 0$ la primera elongación tiene lugar en el instante inicial, prosiguiendo el movimiento como más arriba.

Si $v_0 < 0$, la desviación empieza por decrecer, el móvil pasa por cero al cabo de $t_{01} = \frac{\pi - \varphi}{b''}$, alcanza su primera elongación, que es negativa, para $t_{m1} = \frac{\gamma}{b''}$, pasa de nuevo por cero para $t_{02} = \frac{2\pi - \varphi}{b''}$, y así sucesivamente (fig. 4b).

Dicho esto, es fácil ver que el tiempo que transcurre entre el instante de una elongación y el pasaje por cero anterior o posterior es independiente de Θ_0 y v_0. Se encuentra así

$$\Theta_0 > 0, \quad v_0 > 0: \quad t_1 = t_{m2} - t_{01} = t_{m3} - t_{02} = \ldots = \frac{\gamma + \varphi}{b''} =$$

$$= \frac{1}{b''} \, arctg \, \frac{b''}{b} \tag{57}$$

$$t_2 = t_{01} - t_{m1} = t_{02} - t_{m2} = \ldots = \frac{T}{2} - t_1 =$$

$$= \frac{1}{b''} \left(\pi - arctg \, \frac{b''}{b} \right) \tag{58}$$

$$\Theta_0 > 0, \quad v_0 < 0: \quad t_1 = t_{m1} - t_{01} = t_{m2} - t_{02} = \ldots = \frac{\gamma + \varphi - \pi}{b''} =$$

$$= \frac{1}{b''} \, arctg \, \frac{b''}{b}$$

$$t_2 = t_{02} - t_{m1} = t_{03} - t_{m2} = \ldots = \frac{T}{2} - t_1 =$$

$$= \frac{1}{b''}\left(\pi - arctg \frac{b''}{b}\right)$$

Ahora bien, $arctg \frac{b''}{b} < \frac{\pi}{2}$, de modo que $t_1 < \frac{T}{4}$: el tiempo que emplea el móvil partiendo de cero en alcanzar la elongación es menor que el que emplea en volver desde la elongación al cero; esta disimetría, propiedad bien conocida de las funciones periódicas amortiguadas, es tanto más marcada cuanto mayor es el amortiguamiento:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{arctg \frac{b''}{b}}{\pi - arctg \frac{b''}{b}} = \frac{arctg \frac{\pi}{\lambda}}{\pi - arctg \frac{\pi}{\lambda}} = \frac{arctg \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}}{\pi - arctg \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}} \quad (59)$$

El hecho de que t_1, t_2 y λ no dependen de Θ_0 y v_0 hace prever que las curvas $\Theta\ (t)$ pueden todas superponerse mediante un cambio de escala de las ordenadas y una translación a lo largo del eje de abscisas [véase I 6].

III) $b = w_0$, $\alpha = 1$. Es el caso del amortiguamiento crítico; el movimiento es aperiódico. $\frac{d\Theta}{dt}$ se anula para

$$t = t_m = \frac{v_0}{b\ (v_0 + \Theta_0 b\ )} \quad (60)$$

lo que da, haciendo en (27) $t = t_m$

$$\Theta_{max} = \frac{1}{b} e^{-b\, t_m} (v_0 + \Theta_0 b\ ) \quad (61)$$

Supongamos para fijar las ideas $\Theta_0 > 0$; para $v_0 > 0$ hay un máximo (fig. 5a); para $v_0 = 0$ el máximo tiene lugar en el instante inicial; para $0 > v_0 > - \Theta_0 b$, $\frac{d\Theta}{dt}$ es constantemente negativa y el móvil vuelve al cero sin presentar ningún máximo ni mínimo (fig. 5b); finalmente para $v_0 < - \Theta_0 b$ hay mínimo: el móvil sobrepasa la posición de equilibrio, alcanza su elongación y vuelve al cero (fig. 5c).

Todas estas curvas son reductibles entre sí: se puede llegar a superponerlas mediante un cambio de escala de las ordenadas,

una translación a lo largo del eje de abscisas y eventualmente un cambio de signo [16]. Constituye una excepción el caso en que $v_0 = - \Theta_0 b$, valor que anula el coeficiente N en la expresión general (26); se tiene entonces

$$\Theta = \Theta_0 \, e^{-bt} \tag{62}$$

curva que tiene un aspecto semejante al de la curva de la fig. 5b, pero que no puede ser llevada a superponerse con esta última.

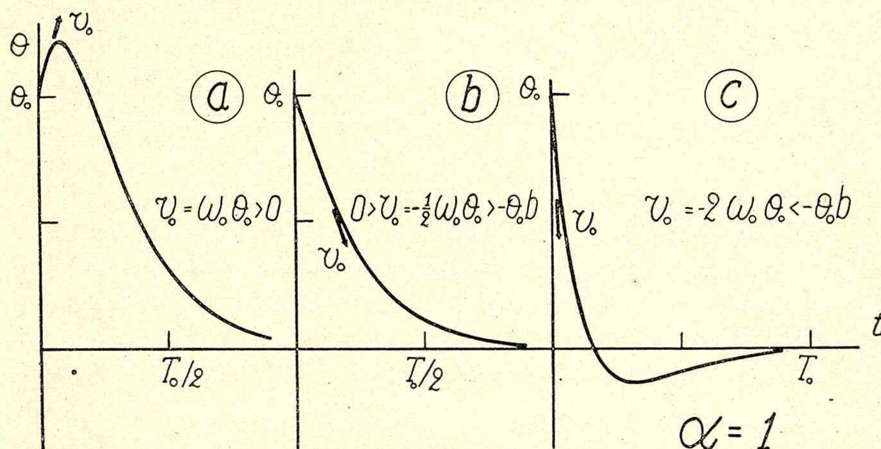


Fig. 5

Es evidente que todas las curvas, cualesquiera que sean las condiciones de amortiguamiento o las iniciales, admiten el eje de los tiempos como asíntota.

6. Curvas únicas de movimiento. Ya hemos mencionado más arriba que se pueden reducir ciertas series de curvas de movimiento a curvas únicas, independientes de las condiciones iniciales.

Consideremos el caso en que $\alpha > 1$ y los valores de v_0 y Θ_0 son tales que se cumple la condición (29).

Se tiene entonces

$$\Theta = \pm \frac{\sqrt{(\Theta_0 b + v_0)^2 - (\Theta_0 b')^2}}{b'} \, e^{-bt} \, sh\,(b' t + \varphi) \tag{31}$$

$$\Theta_{\substack{max \\ min}} = \pm \frac{\sqrt{(\Theta_0 b + v_0)^2 - (\Theta_0 b')^2}}{w_0} \, e^{-b\,t_m} \tag{34}$$

de donde

$$\frac{\Theta}{\Theta_{max}} = \frac{w_o}{b'} e^{-b(t-t_m)} sh(b't + \varphi) \qquad (63)$$

Hagamos $\qquad t - t_m = t' \qquad (64)$

resulta, teniendo en cuenta la relación (35):

$$\frac{\Theta}{\Theta_{max}} = \frac{w_o}{b'} e^{-bt'} sh\left(b't' + (b't_m + \varphi)\right) =$$

$$= \frac{w_o}{b'} e^{-bt'} sh\left(b't' + arcth\frac{b'}{b}\right) \qquad (65)$$

La expresión (65) de $\frac{\Theta}{\Theta_{max}}$ es independiente de las condiciones iniciales: éstas no hacen más que fijar el origen de una curva particular sobre la curva única (65), que bastará considerar.

La formación de la relación $\frac{\Theta}{\Theta_{max}}$ equivale a una modificación de la escala de las ordenadas y eventualmente una inversión: la transformación (64) representa la translación de dos curvas $\frac{\Theta}{\Theta_{max}}$ (fig. 6) en t'_m y t''_m respectivamente, lo que lleva las elongaciones sobre el eje de ordenadas y hace coincidir las dos curvas con la (65). Observemos que para $-\Theta_o(b - b') < v_o < 0$, t_m es negativa, la elongación no tiene existencia real, el movimiento empieza en un punto situado después del máximo.

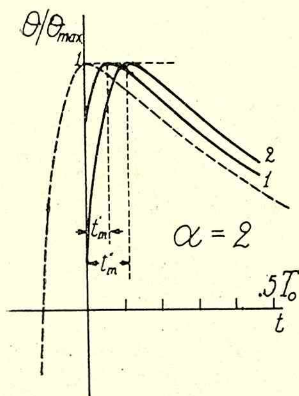


Fig. 6

El caso en que $\alpha < 1$ se obtiene del precedente: bastará con hacer $b' = j\,b''$ en (65) para obtener

$$\frac{\Theta}{\Theta_{max}} = \frac{w_o}{b''} e^{-bt'} sen\left(b''t' + arctg\frac{b''}{b}\right) \qquad (66)$$

ecuación de la curva única válida para todos los valores de v_o y Θ_o sin restricciones.

Del mismo modo, cuando $\alpha = 1$, dividiendo (27) por (61):

$$\frac{\Theta}{\Theta_{max}} = b\, e^{-b(t-t_m)} \left(t + \frac{\Theta_o}{\Theta_o b + v_o}\right) \qquad (67)$$

y la translación (64) da

$$\frac{\Theta}{\Theta_{max}} = e^{-bt'} \, (1 + bt') \qquad (68)$$

válida para todos los valores de v_o salvo $v_o = -\Theta_o b$.

Se entiende que para $-\Theta_o b < v_o < 0$, t_m es negativa, el máximo no tiene existencia real.

Queda por examinar el caso en que, siendo α superior a 1, es la condición (32) la que se cumple.

La ecuación (37):

$$\Theta = \frac{\sqrt{(\Theta_o b')^2 - (\Theta_o b + v_o)^2}}{b'} \, e^{-bt} \, ch\,(b't + \varphi)$$

se escribe ahora, haciendo

$$t = t' - \frac{\varphi}{b'} \qquad (69)$$

$$\frac{\Theta}{e^{\frac{b}{b'}\varphi}\sqrt{(\Theta_o b')^2 - (\Theta_o b + v_o)^2}} = e^{-bt'} \, ch\, b' t' \qquad (70)$$

independiente de las condiciones iniciales. Es de notar que la translación (69) es también aplicable a los casos tratados en primer lugar: consiste en llevar sobre el eje de ordenadas los puntos de pasaje por cero (reales o ficticios) en lugar de los correspondientes a la elongación; las dos maneras de proceder son equivalentes porque para un valor de α dado, el intervalo que separa el pasaje por cero de la elongación es independiente de las condiciones iniciales.

El interés de las curvas únicas es evidente porque su estudio basta para permitir responder a todos los casos que se pueden presentar. Sin embargo el interés del caso más general en que $\Theta_o \neq 0$ y $v_o \neq 0$, aunque veremos algunas de sus aplicaciones en el texto, es relativamente reducido; generalmente hay que tratar con uno de los casos particulares siguientes:

I) $\Theta_o = 0 \qquad v_o > 0$

caso del móvil en reposo que ha recibido un impulso que ha cesado antes de comenzar el movimiento (caso del balístico), y

II) $\Theta_o > 0 \qquad v_o = 0$

caso del móvil desviado de la posición de equilibrio y abandonado sin velocidad inicial (ruptura instantánea de una corriente de cualquier naturaleza y, bajo ciertas reservas, establecimiento de una corriente continua permanente). De acuerdo con la discusión anterior, los dos casos se reducen evidentemente uno a otro de manera que nos bastará estudiar el primer caso y extender los resultados al segundo, o aún al caso más general.

7. Estudio detallado del caso particular $\Theta_o = 0$, $v_o > 0$ El tiempo $t_m = t_1$ (y $\tau_1 = w_o t_1$) empleado por el móvil en alcanzar la elongación es [ver (33), (45), (60)]:

$$\alpha > 1: \qquad t_1 = \frac{1}{b'} \operatorname{arcth} \frac{b'}{b} = \frac{1}{2b'} \log_e \frac{b+b'}{b-b'} \tag{71}$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2-1}} \log_e \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}} \tag{72}$$

$$\alpha = 1: \qquad t_1 = \frac{1}{b} = \frac{1}{w_o} = \frac{T_o}{2\pi} \tag{73}$$

$$\tau_1 = 1 \tag{74}$$

$$\alpha < 1: \qquad t_1 = \frac{1}{b''} \operatorname{arctg} \frac{b''}{b} \tag{75}$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \tag{76}$$

$$\alpha = 0: \qquad t_1 = \frac{\pi}{2w_o} = \frac{T_o}{4} \tag{77}$$

$$\tau_1 = \frac{\pi}{2} \tag{78}$$

La elongación [1], cualquiera que sea el amortiguamiento, está dada por la expresión

$$\Theta_{max} = \frac{v_o}{w_o} e^{-b t_1} = \frac{v_o}{w_o} e^{-\alpha \tau_1} \tag{79}$$

que resume las relaciones siguientes [ver (34), (49), (61)]:

1) tomada en valor absoluto si $\alpha < 1$.

$$\alpha > 1: \Theta_{max} = \frac{v_o}{w_o} e^{-\frac{b}{b'} \, arcth \, \frac{b'}{b}} = \frac{v_o}{w_o} \left(\frac{b - b'}{b + b'} \right)^{\frac{b}{2b'}} =$$

$$= \frac{v_o}{w_o} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \, arcth \, \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}} = \frac{v_o}{w_o} \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}} \right)^{\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha^2-1}}} . \quad (80)$$

$$\alpha = 1: \Theta_{max} = \frac{v_o}{w_o} \frac{1}{e} \quad (81)$$

$$\alpha < 1: \Theta_{max} = \frac{v_o}{w_o} e^{-\frac{b}{b''} \, arctg \, \frac{b''}{b}} = \frac{v_o}{w_o} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \, arctg \, \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}} =$$

$$= \frac{v_o}{w_o} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \, arctg \, \frac{\pi}{\lambda}} \quad (82)$$

$$\alpha = 0: \Theta_{max} = \frac{v_o}{w_o} \quad (83)$$

Las ecuaciones del movimiento [véase (27), (31), (43)], se escriben, teniendo en cuenta que $\varphi = 0$ (porque $\Theta_o = 0$) y con los valores de t_1 indicados más arriba:

$$\alpha > 1: \quad \Theta = \frac{v_o}{b'} e^{-bt} sh \, b't \quad (84a)$$

$$\text{o} \quad \frac{\Theta}{\Theta_{max}} = \frac{w_o}{b'} e^{-b(t - t_1)} sh \, b't = \frac{w_o}{b'} \left(\frac{b + b'}{b - b'} \right)^{\frac{b}{2b'}} e^{-bt} sh \, b't =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}} \right)^{\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}}} e^{-\alpha\tau} sh \sqrt{\alpha^2 - 1} \, \tau \quad (84\,b)$$

$$\alpha = 1: \quad \Theta = v_o \, t \, e^{-bt} \quad (85\,a)$$

$$\text{o} \quad \frac{\Theta}{\Theta_{max}} = bt \, e^{-b(t - t_1)} = w_o \, t \, e^{1 - w_o t} = \tau \, e^{1 - \tau} \quad (85b)$$

$$\alpha < 1: \quad \Theta = \frac{v_o}{b''} e^{-bt} sen \, b''t \quad (86\,a)$$

o $\dfrac{\Theta}{\Theta_{max}} = \dfrac{w_o}{b''} e^{-b(t-t_1)} \operatorname{sen} b''t = \dfrac{w_o}{b''} e^{\frac{b}{b''} \operatorname{arctg} \frac{b''}{b}} e^{-bt} \operatorname{sen} bt =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} e^{-\alpha(\tau - \tau_1)} \operatorname{sen} \sqrt{1-\alpha^2}\, \tau \qquad (86b)$$

$$\alpha = 0: \quad \Theta = \frac{v_o}{w_o} \operatorname{sen} w_o t \qquad (87a)$$

o $$\frac{\Theta}{\Theta_{max}} = \operatorname{sen} w_o t = \operatorname{sen} \tau \qquad (87b)$$

Observemos que es fácil ver que $\dfrac{\Theta}{\Theta_{max}}(t)$ presenta un punto de inflexión si $\alpha \geqq 1$ y dos puntos de inflexión por pseudo-período si $\alpha < 1$. Para encontrar el tiempo t_i (o τ_i) correspondiente, basta estudiar las derivadas de orden superior al primero. Se encuentra, cualquiera que sea el movimiento

$$t_i = 2t_1 \quad \text{o sea} \quad \tau_i = 2\tau_1 \qquad (88)$$

Casos particulares.

1. Galvanómetro muy fuertemente amortiguado.

Las ecuaciones se simplifican; se tiene entonces

$$b' = \sqrt{b^2 - w_o^{\,2}} \cong b - \frac{w_o^{\,2}}{2b} \qquad (89)$$

o sea

$$\sqrt{\alpha^2 - 1} \cong \alpha - \frac{1}{2\alpha} \qquad (90)$$

y resulta

$$\tau_1 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2-1}} \log_e \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}} \cong \frac{\log_e 2\alpha}{\alpha} \qquad (91)$$

$$\Theta_{max} = \frac{v_o}{w_o} e^{-\alpha \tau_1} \cong \frac{v_o}{2b} \qquad (92)$$

Se observará que τ_1 tiende hacia cero cuando α tiende a infinito: el móvil lanzado alcanza su elongación muy rapidamente si el movimiento es muy amortiguado. Sin embargo hay que tener en cuenta una excepción, a saber, cuando α tiende a infinito porque

C tiende a cero; en esas condiciones w_0 tiende igualmente a cero, pero el tiempo

$$t_1 = \frac{\tau_1}{w_0} = \frac{2K}{A} \log_e 2\alpha$$

tiende a infinito: se vuelve al caso del flúxmetro.

La ecuación del movimiento (84a), considerada solamente a partir de un valor de t suficientemente grande como para que se pueda hacer $sh\, b't = \frac{1}{2} e^{b't}$ (debe haberse pasado el máximo), es

$$\Theta \cong \frac{v_0}{2b} e^{(-b+b')t} \cong \frac{v_0}{2b} e^{-\frac{w_0}{2\alpha} t} \tag{93}$$

2. *Galvanómetro muy poco amortiguado.*

La expresión

$$\Theta_{max} = \frac{v_0}{w_0} e^{-\frac{\lambda}{\pi} arctg \frac{\pi}{\lambda}} \tag{82}$$

puede escribirse, reemplazando $e^{-\frac{\lambda}{\pi} arctg \frac{\pi}{\lambda}}$ por los primeros términos del desarrollo en serie, válido solamente si $\frac{\lambda}{\pi} < 1$:

$$e^{-\frac{\lambda}{\pi} arctg \frac{\pi}{\lambda}} = 1 - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\lambda}{\pi} + \left(1 + \frac{\pi^2}{8}\right) \frac{\lambda^2}{\pi^2} - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^3}{48}\right) \frac{\lambda^3}{\pi^3} + ..$$

$$... = 1 - 1{,}57 \frac{\lambda}{\pi} + 2{,}23 \frac{\lambda^2}{\pi^2} - 2{,}22 \frac{\lambda^3}{\pi^3} + ...$$

$$... = 1 - 0{,}5\,\lambda + 0{,}23\,\lambda^2 - 0{,}071\,\lambda^3 + ... \tag{94}$$

La serie no es alternada.

Se puede, sin cometer un error superior a 0,5 %, limitarse al primer término del desarrollo si $\lambda \leq 0{,}01$, y a los dos primeros términos si $\lambda \leq 0{,}15$; resulta en este último caso

$$\Theta_{max} = \frac{v_0}{w_0} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \tag{95}$$

El desarrollo no interesa realmente más que si se puede li-

mitar a los dos o tres primeros términos, ya que el cálculo de la función se efectúa sin dificultad y bastante rapidamente con ayuda de las tablas; se podrá también medir su valor en la curva $\frac{\Theta_{max}\, w_o}{v_o}(\alpha)$ representada en la fig. 15 del mismo capítulo. La correspondencia entre los valores de α y λ está indicada en el cuadro V, pág. 42.

8. Retorno al cero ($\Theta_o = 0,\ v_o > 0$). Después de haber pasado por Θ_{max} el móvil vuelve al cero, que no alcanza, teoricamente, sino después de un tiempo infinito, y esto cualquiera que sea el amortiguamiento. No obstante, al cabo de un tiempo más o menos grande, la desviación se hace lo suficientemente pequeña como para que se pueda considerar al móvil practicamente en equilibrio.

El problema del retorno al cero está relacionado al de la rapidez y comodidad de lecturas, sin hablar de otras aplicaciones importantes que veremos más adelante; merece pues que se le considere con atención. Consiste en la determinación del tiempo t_r necesario para que la desviación llegue a ser una fracción suficientemente pequeña $\frac{1}{n}$ de la elongación Θ_{max}; cuanto mayor es n más precisa es la lectura. Hay que distinguir según que α sea igual, superior o inferior a la unidad.

I) $\alpha = 1$. Basta con hacer

$$\frac{\Theta}{\Theta_{max}} = \frac{1}{n} \qquad (96)$$

en la ecuación de movimiento (85 b), de donde

$$\frac{1}{n} = \tau_r\, e^{1 - \tau_r} \qquad (97)$$

con

$$\tau_r = w_o\, t_r \qquad (98)$$

Se escribe pues

$$\log_e \tau_r = \tau_r - (1 + \log_e n) \qquad (99)$$

La fig. 7 da la solución gráfica de (99) para $n = 100,\ 200,\ 500$ y 1000.

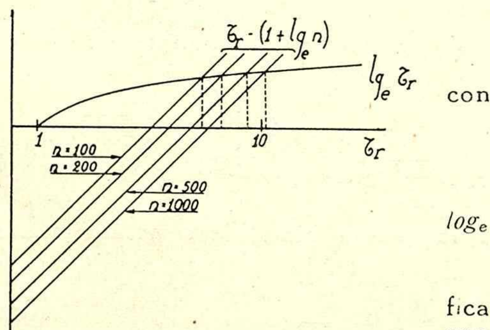


Fig. 7

Se puede caracterizar el tiempo de retorno al cero por τ_r, lo que presenta la ventaja de simplificar algunas fórmulas suprimiendo el factor 2π; pero preferimos utilizar $\frac{t_r}{T_o} = \frac{\tau_r}{2\pi}$, porque se tiene una noción física más íntima de T_o que de w_o; por otra parte los catálogos indican siempre T o T_o y no b'' o w_o.

Los valores de $\frac{t_r}{T_o}$ están dados en el cuadro I.

CUADRO I

$\alpha = 1$	n	100	200	500	1000
	$\frac{t_r}{T_o}$	1,21	1,34	1,50	1,62

II) $\alpha > 1$. Se tiene, partiendo de (84 b)

$$\frac{\Theta}{\Theta_{max}} = \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}} \right)^{\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}}} e^{-\alpha \tau_r} sh \sqrt{\alpha^2 - 1}\, \tau_r \qquad (100)$$

El retorno al cero es más lento que para $\alpha = 1$; a igualdad de n, τ_r es siempre superior a los valores correspondientes a los de $\frac{t_r}{T_o}$ del cuadro I, o sea a $2\pi .\ 1{,}21 = 7{,}6$; se puede pues admitir ya para valores de $\alpha \geq 1{,}05$ con un error inferior a 1 %:

$$sh \sqrt{\alpha^2 - 1}\, \tau_r \cong \frac{1}{2} e^{\sqrt{\alpha^2 - 1}\, \tau_r}$$

lo que permite transformar (100) y deducir facilmente $\frac{t_r}{T_o}$:

$$\frac{t_r}{T_o} = \frac{1}{2\pi(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})} \log_e \frac{n}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}} \right)^{\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}}} \qquad (101)$$

Para valores de $\alpha > 3{,}5$ se puede simplificar notablemente (101) haciendo

$$\sqrt{\alpha^2 - 1} \cong \alpha - \frac{1}{2\alpha} \qquad (90)$$

lo que da

$$\frac{t_r}{T_o} = \frac{\alpha}{\pi} \log_e n + \frac{\log_e 2\,\alpha}{2\,\pi\,\alpha} \qquad (101\,a)$$

La aplicación de (101a) en lugar de (101) no da más que un error de $\sim 2\,\%$ para $\alpha = 3{,}5$, pero este error es ya de $\sim 15\,\%$ para $\alpha = 1{,}5$.

Para valores suficientemente grandes de α, se puede despreciar también $\frac{\log_e 2\,\alpha}{2\,\pi\,\alpha}$, que según la relación (91) establecida más arriba no es otra cosa que $\frac{t_1}{T_o}$; la variación de $\frac{t_r}{T_o}(\alpha)$ es entonces practicamente lineal.

III) $\alpha < 1$. La ecuación del movimiento es

$$\frac{\Theta}{\Theta_{max}} = \frac{w_o}{b''} e^{-b(t - t_1)} \operatorname{sen} b'' t \qquad (86\,b)$$

Supongamos que la segunda elongación Θ_2 sea infinitamente poco inferior a la más pequeña desviación que se puede observar

$$\Theta_{min} = \frac{\Theta_{max}}{n} = \frac{\Theta_1}{n} \qquad (102)$$

es decir que el decremento $\lambda = \log_e \frac{\Theta_1}{\Theta_2}$ sea infinitamente poco superior al valor límite λ_1:

$$\lambda_1 = \log_e \frac{\Theta_1}{\Theta_{min}} = \log_e n \qquad (103)$$

al que corresponde el grado de amortiguamiento

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\pi^2 + \lambda_1^{\,2}}} \qquad (104)$$

En estas condiciones no se observará segunda elongación; el aparato, aunque periódico, *parecerá* aperiódico; el tiempo de retorno al cero es t_r (fig. 8), algo inferior a

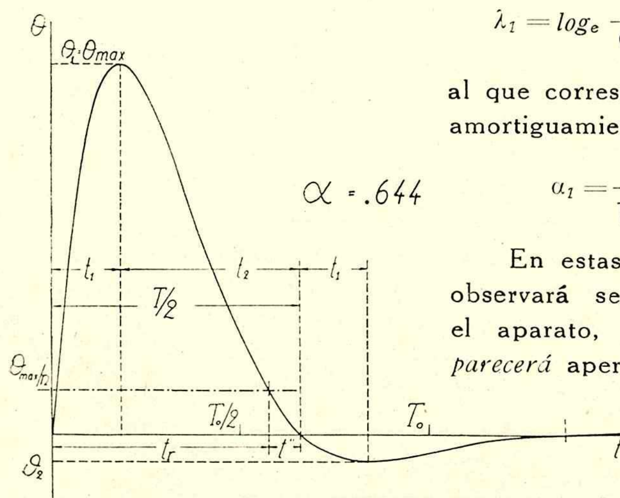


Fig. 8

$\frac{T}{2}$, abscisa del punto de intersección de la horizontal $\Theta = \Theta_{min}$ con la rama descendente de $\frac{\Theta}{\Theta_{max}}(t)$ en su primer semi-pseudo-período. Se tiene

$$t_r = \frac{T}{2} - t''$$

Se encuentra el orden de magnitud de t'' observando que para $t = t_r$, próximo a $\frac{T}{2}$, se puede escribir

$$sen\, b''\, t_r \cong b''\, t''$$

o sea

$$\frac{\Theta_{min}}{\Theta_{max}} = \frac{1}{n} = w_o\, t'' e^{-b\,(t_r - t_1)}$$

lo que da, haciendo

$$e^{-b\,t_r} \cong e^{-\frac{b\,T}{2}} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{t''}{T_o} = \frac{1}{2\pi} e^{-b\,t_1}$$

de donde, finalmente

$$\frac{t_r}{T_o} = \frac{T}{2T_o} - \frac{t''}{T_o} = \frac{1}{2\sqrt{1-\alpha_1^{\,2}}} - \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\alpha_1}{\sqrt{1-\alpha_1^{\,2}}} arctg \frac{\sqrt{1-\alpha_1^{\,2}}}{\alpha_1}} \qquad (105)$$

A cada valor de n corresponden valores de λ_1 y α_1 perfectamente definidos, que consignamos, con los correspondientes valores de $\frac{t_r}{T_o}$ dados por (105), en el cuadro II.

CUADRO II

n	100	200	500	1000
$\lambda_1 = log_e\, n$	4,61	5,30	6,21	6,91
α_1	0,83	0,86	0,89	0,91
$\frac{t_r}{T_o}$	0,82	0,92	1,05	1,15

Es fácil ver que los valores de $\frac{t_r}{T_0}$ del cuadro II son los valores mínimos del tiempo de retorno al cero de un galvanómetro. En efecto, supongamos que:

1) α aumenta a partir de α_1 : $\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ aumenta, lo mismo que $\frac{t''}{T_0}$, cuyo cálculo dado más arriba ya no es válido; para α tendiendo a la unidad (86 b) tiende hacia (85 b) y $\frac{t_r}{T_0}$ alcanza los valores del cuadro I para $\alpha = 1$ (fig. 9).

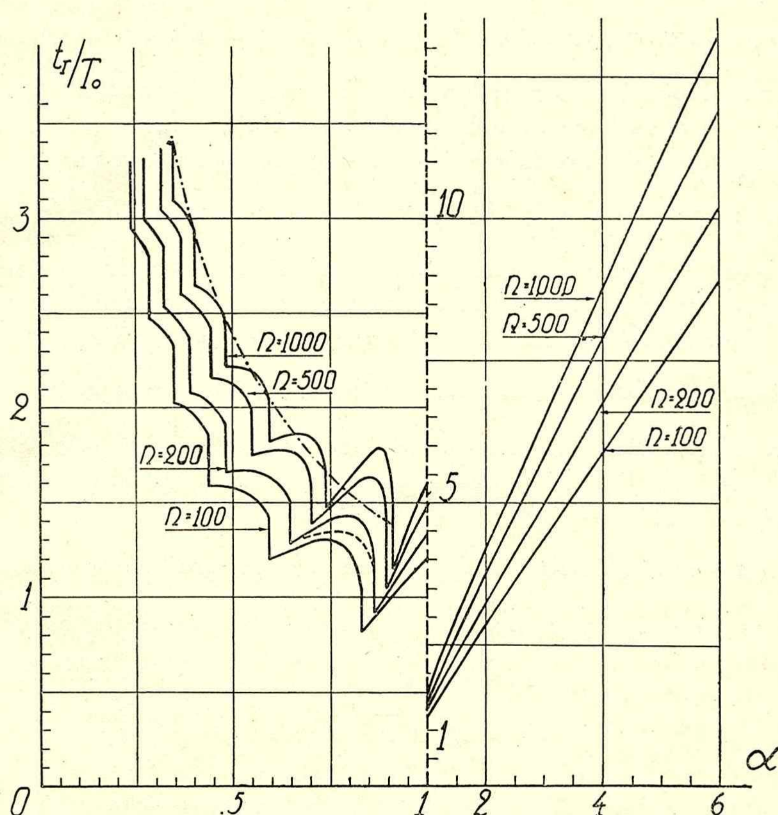


Fig. 9

2) α disminuye a partir de un valor infinitamente poco superior a α_1 : la segunda elongación se hace visible, $\frac{t_r}{T_0}$ pasa bruscamente de

$$\frac{t_r}{T_o} = \frac{1}{T_o}\left(\frac{T}{2} - t''\right) \qquad (105)$$

para α infinitamente poco superior a α_1, a

$$\frac{t_r}{T_o} = \frac{1}{T_o}\left(\frac{T}{2} + t_1\right) = \frac{1}{2\sqrt{1-\alpha_1^{\,2}}}\left(1 + \frac{1}{\pi}\, arctg \frac{\sqrt{1-\alpha_1^{\,2}}}{\alpha_1}\right) \qquad (106)$$

para α infinitamente poco inferior a α_1.

Hay pues un aumento brusco de $\frac{t_r}{T_o}$ al pasar por $\alpha = \alpha_1$; si α continúa disminuyendo, $\frac{t_r}{T_o}$ aumenta primero a partir de los valores dados por (106), pasa por un máximo y disminuye después hasta que α se hace lo suficientemente pequeña como para que la tercera desviación se haga visible: se produce entonces una nueva discontinuidad de $\frac{t_r}{T_o}$ (fig. 9). Tal comportamiento de $\frac{t_r}{T_o}$ se explica por el hecho de que cuando disminuye α, por una parte aumenta Θ_2 y se percibe una mayor parte del semi-pseudo-período que sigue, pero por otra parte el pseudo-período T disminuye con α lo que ocasiona una disminución de $\frac{t_r}{T_o}$ El primer efecto predomina al principio, el segundo después; se puede ver esto claramente en la fig. 10, trazada para $\alpha = 0{,}860$, $0{,}826$, $0{,}786$ y $0{,}644$; se tomó $n = 200$.

La discontinuidad en el valor de $\frac{t_r}{T_o}$ se produce pues cada vez que una nueva elongación se hace visible, es decir, para

$$\lambda_1 = log_e\, n$$

$$\lambda_2 = log_e \sqrt{n} = \frac{\lambda_1}{2}$$

$$\lambda_3 = log_e \sqrt[3]{n} = \frac{\lambda_1}{3}$$

....

$$\lambda_p = log_e \sqrt[p]{n} = \frac{\lambda_1}{p}$$

....

pasando $\frac{t_r}{T_o}$ respectivamente

$$\text{de } \frac{1}{T_o}\left(\frac{T}{2} - t''\right) \quad \text{a} \quad \frac{1}{T_o}\left(\frac{T}{2} + t_1\right)$$

$$\text{de } \frac{1}{T_o}\left(2\frac{T}{2} - t''\right) \quad \text{a} \quad \frac{1}{T_o}\left(2\frac{T}{2} + t_1\right)$$

$$\text{de } \frac{1}{T_o}\left(3\frac{T}{2} - t''\right) \quad \text{a} \quad \frac{1}{T_o}\left(3\frac{T}{2} + t_1\right)$$

....

$$\text{de } \frac{1}{T_o}\left(p\frac{T}{2} - t''\right) \quad \text{a} \quad \frac{1}{T_o}\left(p\frac{T}{2} + t_1\right)$$

....

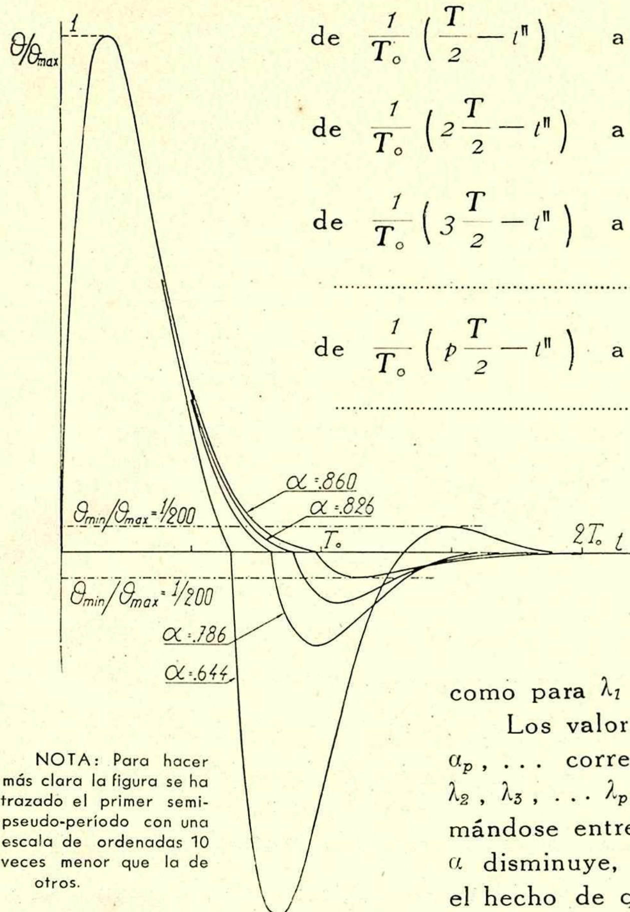


Fig. 10

Se verifica facilmente que la expresión aproximada de t'' dada mas arriba vale tanto para λ_2, λ_3, ... λ_p, ... como para λ_1.

Los valores α_1, α_2, α_3, ... α_p, ... correspondientes a λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_p, ... van aproximándose entre sí a medida que α disminuye, lo que, junto con el hecho de que la disminución de T con α es tanto más lenta cuanto más pequeña es α, hace que $\frac{t_r}{T_o}$ no acuse máximos en los intervalos $\alpha_k - \alpha_{k+1}$ de orden superior (fig. 9).

La determinación de $\frac{t_r}{T_o}$ para un valor cualquiera de α comprendido en un intervalo $\alpha_k - \alpha_{k+1}$ es penosa, porque hay que partir de la fórmula (86 b), pero se puede facilmente determinar un valor aproximado reemplazando la rama descendente de la sinusoide amortiguada por un segmento de recta definido por los

puntos de la elongación por una parte y del pasaje por cero que le sigue por otra (fig. 11).

De la semejanza de los triángulos $A\ B\ C$ y $b\ c\ B$, teniendo en cuenta que

$$\frac{\Theta_k}{\Theta_{max}} = e^{-(k-1)\lambda}$$

se deduce

$$\frac{t_r}{T_o} = \frac{1}{2\sqrt{1-\alpha^2}} \left\{ k - \frac{1}{n}\, e^{\frac{(k-1)\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}} \left(1 - \frac{1}{n}\, arctg \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \right) \right\} \quad (107)$$

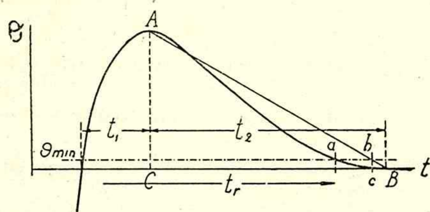


Fig. 11

Esta relación nos ha servido para el trazado de $\frac{t_r}{T_o}(\alpha)$ con $\alpha < \alpha_1$; con el fin de que se pueda apreciar la aproximación obtenida, hemos indicado en la fig. 9 en punteado la parte exacta de $\frac{t_r}{T_o}(\alpha)$ obtenida graficamente a partir de (86 b) para $n = 200$ en el intervalo de α comprendido entre 0,644 y 0,860.

Las curvas de la fig. 9 dan $\frac{t_r}{T_o}(\alpha)$ para $0{,}3 < \alpha \leq 6$. Se observará la influencia de n, o sea de la precisión de la lectura.

Se admite a menudo para $\frac{t_r}{T_o}(\alpha)$, con $\alpha \leq \alpha_1$, o aún $\alpha < 1$, la relación simplificada:

$$\frac{t_r}{T_o} = \frac{log_e\, n}{2\pi\alpha} + \frac{t_1}{T_o} = \frac{log_e\, n}{2\pi\alpha} + \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}}\, arctg \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \quad (108)$$

obtenida de la manera siguiente: todas las elongaciones Θ_k, consideradas en valor absoluto, están situadas sobre la curva

$$\frac{\Theta_k}{\Theta_{max}} = e^{-b(t-t_1)}$$

de manera que si se admite que Θ_{min} *es una elongación*, se tiene

$$\frac{1}{n} = \frac{\Theta_{min}}{\Theta_{max}} = \frac{\Theta_k}{\Theta_{max}} = e^{-b(t_r - t_1)}$$

de donde resulta la relación (108), representada con línea punteada en la fig. 9 para $n = 1000$.

Frecuentemente hay que considerar al móvil que vuelve al cero al cabo de algunas oscilaciones; la relación (108) da entonces rapidamente un valor suficientemente aproximado de $\frac{t_r}{T_o}$.

El empleo de (108) se justifica también por el hecho de que, cuando se trata de evaluar el tiempo de retorno al cero, es inútil buscar una precisión demasiado grande: en efecto, el ojo no puede darse cuenta del instante preciso en que la desviación se hace demasiado pequeña para ser apreciable y para estar seguro debe continuar la observación durante cierto tiempo, de manera que en realidad $\frac{t_r}{T_o}$ de la fig. 9 no representa más que el tiempo *teórico* de retorno al cero, inferior al *práctico* aproximadamente p. ej. en un semi-pseudo-período, suponiendo el movimiento periódico.

No obstante, la reproducción de las curvas discontinuas de la fig. 9 presenta la ventaja, no solamente de caracterizar mejor el fenómeno, sino también de permitir juzgar, con una simple mirada, contando el número de discontinuidades, al cabo de cuantas oscilaciones se detendrá el móvil.

Observemos finalmente que el estudio ha sido hecho suponiendo n constante: pero hay que tener en cuenta que en la mayoría de los casos n varía de una medida a otra; lo que es generalmente una constante para un aparato dado es Θ_{min}, de manera que n varía con Θ_{max}.

9. Estudio detallado del caso particular $\Theta_o > 0$, $v_o = 0$. Las ecuaciones reducidas del movimiento son [véase (27), (31), (43)]:

$$\alpha > 1 \qquad \frac{\Theta}{\Theta_o} = \frac{w_o}{b'} e^{-bt} sh\,(b't + \varphi) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} e^{-\alpha\tau} sh\,(\sqrt{\alpha^2 - 1}\,\tau + \varphi) \qquad (109)$$

donde

$$\varphi = arcth \frac{b'}{b} = arcth \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} = b'\,t_1 \qquad (110)$$

Para $\alpha >> 1$ y desde que t se hace lo suficientemente grande

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = e^{(-b+b')\,t} \cong e^{-\frac{w_0}{2\alpha}t} \qquad (111)$$

relación idéntica a la (93), en virtud de las aproximaciones hechas.

$\alpha = 1$
$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = (1 + b\,t)\,e^{-b\,t} = (1+\tau)\,e^{-\tau} \qquad (112)$$

$\alpha < 1$
$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \frac{w_0}{b''}\,e^{-b\,t}\,sen\,(b''t + \varphi) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,e^{-\alpha\,\tau}\,sen\,(\sqrt{1-\alpha^2}\,\tau + \varphi) \qquad (113)$$

donde

$$\varphi = arctg\,\frac{b''}{b} = arctg\,\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} = arctg\,\frac{\pi}{\lambda} = b''\,t_1 \qquad (114)$$

$\alpha = 0$
$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = sen\left(w_0\,t + \frac{\pi}{2}\right) = cos\,\tau \qquad (115)$$

Las curvas del movimiento son las del caso precedente consideradas a partir del punto de primera elongación.

10. Retorno al cero ($\Theta_0 > 0,\ v_0 = 0$). El tiempo de retorno al cero se obtiene inmediatamente disminuyendo, para cada valor de α, el valor de $\frac{t_r}{T_0}$ relativo al caso precedente [$\Theta_0 = 0$, $v_0 > 0$], en la cantidad $\frac{t_1}{T_0}$.

Así para $\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots\ \lambda_p$, $\frac{t_r}{T_0}$ pasa respectivamente

de $\frac{1}{T_0}(t_2 - t'')$ a $\frac{1}{T_0}\cdot\frac{T}{2}$

de $\frac{1}{T_0}\left(\frac{T}{2} + t_2 - t''\right)$ a $\frac{1}{T_0}\cdot 2\,\frac{T}{2}$

de $\frac{1}{T_0}\left(2\frac{T}{2} + t_2 - t''\right)$ a $\frac{1}{T_0}\cdot 3\,\frac{T}{2}$

....

de $\frac{1}{T_0}\left((p-1)\frac{T}{2} + t_2 - t''\right)$ a $\frac{1}{T_0}\cdot p\,\frac{T}{2}$

Las relaciones (101), (101 a), (107), (108) se transforman facilmente. En particular, la (101a) se convierte en

$$\frac{t_r}{T_o} = \frac{\alpha}{\pi} \log_e n \qquad (116)$$

válida a $\sim$ 2 °/o para $\alpha \geqq 3{,}5$ y la (108) en

$$\frac{t_r}{T_o} = \frac{\log_e n}{2\pi\alpha} \qquad (117)$$

relación aproximada, válida para $\alpha \leqq \alpha_1$, o aún $\alpha < 1$.

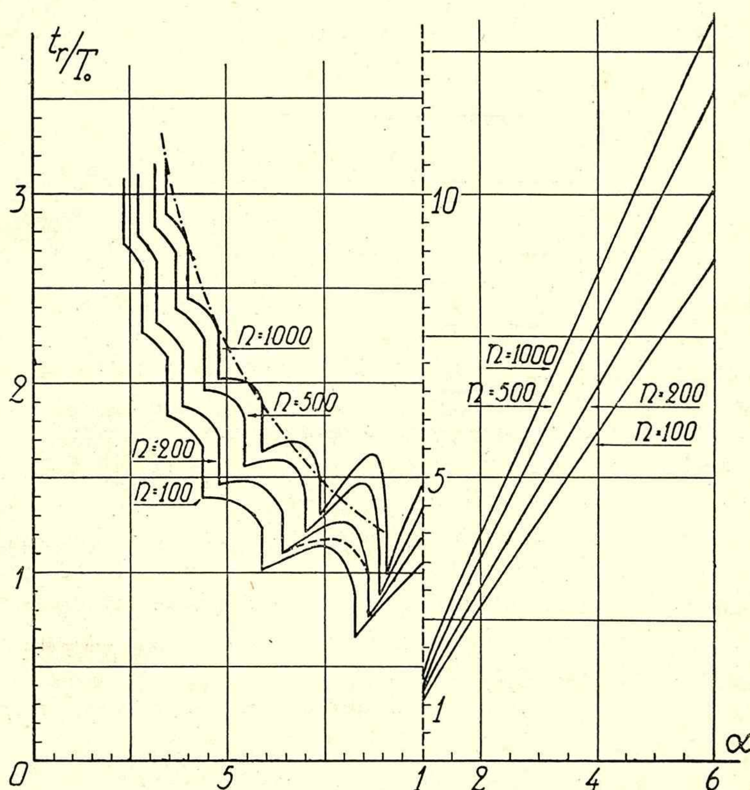


Fig. 12

La fig. 12 da $\frac{t_r}{T_o}$ (α) para $0{,}3 < \alpha \leqq 6$ y n = 100, 200, 500, 1000, obtenida, de acuerdo con lo que antecede, disminuyendo cada ordenada de la fig. 9 en $\frac{t_1}{T_o}$ relativa al mismo valor de α.

Se encontrará más adelante, (fig. 13), la variación $\frac{t_1}{T_o}$ (α).

Los valores de $\frac{t_r}{T_o}$ relativos a $\alpha = 1$ son (cuadro III):

CUADRO III

$\alpha = 1$	n	100	200	500	1000
	$\frac{t_r}{T_o}$	1,05	1,18	1,34	1,46

y los valores mínimos de $\frac{t_r}{T_o}$ son (cuadro IV):

CUADRO IV

n	100	200	500	1000
λ_1	4,61	5,30	6,21	6,91
α_1	0,83	0,86	0,89	0,91
$\frac{t_r}{T_o}$	0,65	0,75	0,89	0,99

11. Retorno al cero en el caso más general. De acuerdo con lo que se ha visto sobre la reductibilidad de las curvas de movimiento, las relativas a los casos en que $\Theta_o = 0$, $v_o > 0$ y $\Theta_o > 0$, $v_o = 0$ no son más que casos particulares de las curvas únicas (65), (66) o (68), y siempre que Θ_o y v_o sean tales que dichas curvas sean aplicables ([1]), se obtendrá t_r restando $(t_1 - t_m)$ de los valores de t_r relativos al caso en que $\Theta_o = 0$, $v_o > 0$. La cantidad $(t_1 - t_m)$ puede ser negativa.

El cálculo de $(t_1 - t_m)$ es inmediato, según lo que precede; así p. ej. si $\alpha < 1$

$$t_1 - t_m = \frac{1}{b''} \, arctg \, \frac{\Theta_o \, b''}{v_o + \Theta_o \, b}$$

La forma de las curvas $\frac{t_r}{T_o}$ (α) será por supuesto análoga a la de las curvas de las figs. 9 y 12.

1) debe cumplirse la condición (29) si $\alpha > 1$ y $v_o \neq -\theta_o b$ si $\alpha = 1$.

12. Resumen de la variación de las magnitudes características del movimiento en función del grado de amortiguamiento. Veremos más adelante, estudiando el funcionamiento de los galvanótros, la importancia primordial de las magnitudes características del movimiento en este funcionamiento. Así p. ej. $\frac{\Theta_{max}\, w_0}{v_0}$ (α) no es otra cosa que la curva de la sensibilidad en balístico, referida a la sensibilidad ideal (en ausencia de amortiguamiento).

Por otra parte la modificación de las condiciones de funcionamiento del aparato se hace a menudo obrando sobre uno o varios de los factores A, K, C y es necesario tener presente en el espíritu la variación de las principales características del movimiento $\frac{t_1}{T_0}$, $\frac{t_r}{T_0}$, $\frac{T}{T_0}$, $\frac{\Theta_{max}\, w_0}{v_0}$, en función de A, K, C, variación que pondremos bajo forma de gráficos, tomando, para simplificar la representación, $\alpha = \frac{b}{w_0} = \frac{A}{2\sqrt{KC}}$ como variable única.

Indicaremos además en el cuadro V la correspondencia entre los valores de $k = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}$, $\lambda = \log_e k$ y $\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}$, particularmente útil en ciertos cálculos y determinaciones ; es en efecto k, la que está dada directamente por la experiencia.

1. Variación de $\frac{t_1}{T_0}$.

Resulta, a partir de (72), (74), (76), (78) :

$\alpha > 1$

$$\frac{t_1}{T_0} = \frac{\tau_1}{2\pi} = \frac{1}{2\,\pi\sqrt{\alpha^2 - 1}}\, \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{4\,\pi\sqrt{\alpha^2 - 1}}\, \log_e \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

Para $\alpha > 3{,}5$ se puede escribir a partir de (91) :

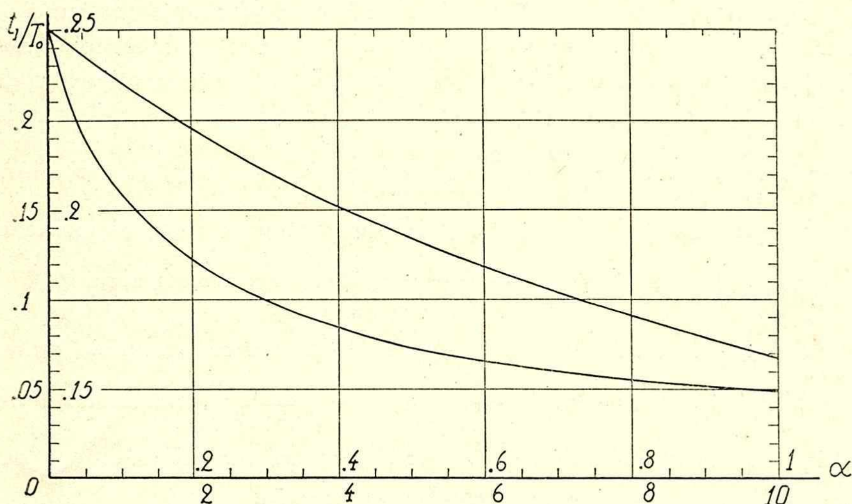
$$\frac{t_1}{T_0} = \frac{\log_e 2\,\alpha}{2\,\pi\,\alpha}$$

$$\alpha = 1 \qquad \frac{t_r}{T_0} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\alpha < 1 \qquad \frac{t_1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$$

$$\alpha = 0 \qquad \frac{t_1}{T_0} = \frac{1}{4}$$

La fig. 13 da $\frac{t_1}{T_0}$ (α) para $0 \leqq \alpha \leqq 10$.



NOTA. Las escalas interiores corresponden a la curva superior y las exteriores a la inferior.

Fig. 13

La curva es continua: t_1 es igual a $\frac{T_0}{4}$ para $\alpha = 0$, a $\frac{T_0}{2\pi}$ para $\alpha = 1$, y tiende hacia cero cuando α tiende hacia infinito: el móvil lanzado del cero alcanza su elongación tanto más rapidamente cuanto más importante es α.

2. *Variación de* $\frac{T}{T_0}$.

La relación (48)

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

permite trazar $\frac{T}{T_0}$ (α) (fig. 14).

3. *Variación de* $\frac{t_r}{T_0}$.

Ver las figuras 9 y 12.

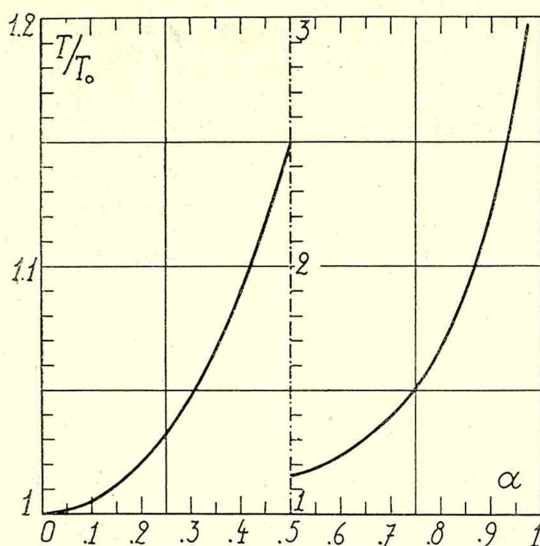


Fig. 14

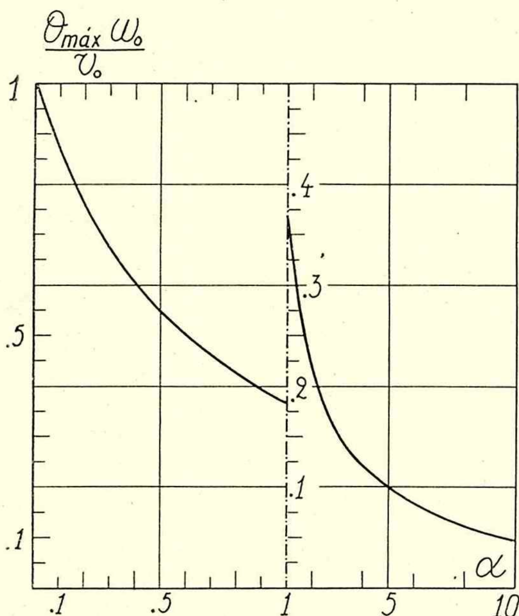


Fig. 15

4. Variación de $\frac{\Theta_{max}\, w_o}{v_o}(\alpha)$.

Nos serviremos de la relación (79):

$$\frac{\Theta_{max}\, w_o}{v_o} = e^{-2\pi\alpha \frac{t_1}{T_o}}$$

siendo los valores de $\frac{t_1}{T_o}$ los que hemos recordado más arriba, representados por la fig. 13.

La curva $\frac{\Theta_{max}\, w_o}{v_o}(\alpha)$ es continua en todo el dominio de la variación de α; parte de 1 para $\alpha = 0$, pasa por $\frac{1}{e}$ para $\alpha = 1$ y tiende hacia cero para α tendiendo a infinito; a igualdad de w_o y v_o la elongación es tanto más pequeña cuanto mayor es el grado de amortiguamiento (fig. 15).

Observemos que es fácil ver que no hay discontinuidad para $\alpha = 1$:

$$\left\{\frac{d}{d\alpha} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} arcth \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}}\right\}_{\alpha=1} = \left\{\frac{d}{d\alpha} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} arctg \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}}\right\}_{\alpha=1} = -\frac{2}{3e}$$

5. Cuadro de valores de k, λ y α para 1,05 ≦ k ≦ 1000.

CUADRO V

k	λ	α	k	λ	α	k	λ	α
1.05	0.0488	0.0155	5.9	1.7750	0.4919	14	2.6391	0.6432
1.1	0.0953	0.0303	6.0	1.7918	0.4954	14.5	2.6741	0.6482
1.2	0.1823	0.0579	6.1	1.8083	0.4989	15	2.7081	0.6529
1.3	0.2624	0.0832	6.2	1.8245	0.5022	15.5	2.7408	0.6574
1.4	0.3365	0.1065	6.3	1.8405	0.5055	16	2.7726	0.6617
1.5	0.4055	0.1280	6.4	1.8563	0.5087	16.5	2.8034	0.6658
1.6	0.4700	0.1480	6.5	1.8718	0.5119	17	2.8332	0.6697
1.7	0.5306	0.1665	6.6	1.8871	0.5149	17.5	2.8622	0.6735
1.8	0.5878	0.1839	6.7	1.9021	0.5179	18	2.8904	0.6771
1.9	0.6419	0.2002	6.8	1.9169	0.5209	18.5	2.9178	0.6805
2.0	0.6931	0.2154	6.9	1.9315	0.5237	19	2.9444	0.6838
2.1	0.7419	0.2298	7.0	1.9459	0.5266	19.5	2.9704	0.6870
2.2	0.7885	0.2434	7·1	1.9601	0.5293	20	2.9957	0.6901
2.3	0.8329	0.2563	7.2	1.9741	0.5321	21	3.0445	0.6959
2.4	0.8755	0.2685	7.3	1.9879	0.5347	22	3.0910	0.7013
2.5	0.9163	0.2800	7.4	2.0015	0.5373	23	3.1355	0.7064
2.6	0.9555	0.2910	7.5	2.0149	0.5399	24	3.1781	0.7112
2.7	0.9933	0.3015	7.6	2.0281	0.5421	25	3.2189	0.7156
2.8	1.0296	0.3114	7.7	2.0412	0.5448	26	3.2581	0.7199
2.9	1.0647	0.3210	7.8	2.0541	0.5473	27	3.2958	0.7238
3.0	1.0986	0.3301	7.9	2.0669	0.5496	28	3.3322	0.7276
3.1	1.1314	0.3388	8.0	2.0794	0.5519	29	3.3673	0.7312
3.2	1.1632	0.3472	8.1	2.0919	0.5542	30	3.4012	0.7346
3.3	1.1939	0.3552	8.2	2.1041	0.5565	31	3.4340	0 7378
3.4	1.2238	0.3630	8.3	2.1163	0.5587	32	3.4657	0.7409
3.5	1.2528	0.3704	8.4	2.1282	0.5609	33	3.4965	0.7439
3.6	1.2809	0.3776	8.5	2.1401	0.5630	34	3.5264	0.7467
3.7	1.3083	0.3846	8.6	2.1518	0.5651	35	3.5553	0.7494
3.8	1.3350	0.3911	8.7	2.1633	0.5671	36	3.5835	0.7520
3.9	1.3610	0.3975	8.8	2.1748	0.5692	37	3.6109	0.7544
4.0	1.3863	0.4037	8.9	2.1861	0.5712	38	3.6376	0.7568
4.1	1.4110	0.4097	9.0	2.1972	0.5731	39	3.6636	0.7591
4.2	1.4351	0.4155	9.1	2.2083	0.5751	40	3 6889	0.7613
4.3	1.4586	0.4211	9.2	2.2192	0.5770	41	3.7136	0.7635
4.4	1.4816	0.4266	9.3	2.2300	0.5788	42	3.7377	0.7655
4.5	1.5041	0.4318	9.4	2.2407	0.5807	43	3.7612	0.7675
4.6	1.5261	0.4370	9.5	2.2513	0.5825	44	3.7842	0 7694
4.7	1.5476	0.4419	9.6	2.2618	0.5843	45	3.8067	0.7713
4.8	1.5686	0.4467	9.7	2.2721	0.5860	46	3.8286	0.7731
4.9	1.5892	0.4514	9.8	2.2824	0.5878	47	3.8501	0.7748
5.0	1.6094	0.4559	9 9	2.2925	0.5895	48	3.8712	0.7765
5.1	1.6292	0.4604	10	2.3026	0.5912	49	3.8918	0.7781
5.2	1.6487	0.4647	10.5	2.3514	0.5992	50	3.9120	0.7797
5.3	1.6677	0.4689	11	2.3979	0.6067	100	4.6052	0.8261
5.4	1.6864	0.4730	11.5	2.4423	0.6138	200	5.2983	0 8602
5.5	1.7047	0.4769	12	2.4849	0.6204	300	5.7038	0.8759
5.6	1.7228	0.4808	12.5	2.5257	0.6266	400	5.9915	0.8856
5.7	1.7405	0.4846	13	2.5649	0.6324	500	6.2146	0.8924
5.8	1.7579	0.4883	13.5	2.6027	0.6380	1000	6.9077	0.9103

13. Regímenes transitorio y forzado del sistema móvil. Generalidades. La ecuación del movimiento

$$K \frac{d^2\Theta}{dt^2} + A \frac{d\Theta}{dt} + C\,\Theta = F(t) \qquad (11)$$

admite como solución general :

I. b diferente de w_o ; b' real o imaginario

$$\Theta = \underbrace{e^{-bt}\left(Me^{b't} + Ne^{-b't}\right)}_{\text{movimiento propio}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2b'K} e^{-bt}\left(e^{b't}\int F(t)\, e^{-(-b+b')t} dt - e^{-b't}\int F(t) e^{-(-b-b')t} dt\right)}_{\text{movimiento forzado}} \qquad (118)$$

II. $b = w_o$, amortiguamiento crítico

$$\Theta = \underbrace{(M+Nt)\, e^{bt}}_{\text{movimiento propio}} + \underbrace{\frac{1}{K} e^{-bt}\left(t\int F(t)\, e^{bt} dt - \int t\, F(t)\, e^{bt} dt\right)}_{\text{movimiento forzado}} \qquad (119)$$

Las constantes M y N se determinan a partir de los datos iniciales.

El interés de esta solución en el caso en que la función $F(t)$ es cualquiera, es restringido; sin embargo, veremos en el capítulo V una aplicación a propósito del estudio de la desviación balística en el caso de una descarga no instantánea. Por el contrario, la solución de algunos casos particulares de $F(t)$ es de gran importancia y vamos a considerarla aquí. Empezaremos por la determinación del régimen forzado, representado, como lo hemos observado más arriba en **I 2**, por una solución particular de la ecuación con segundo miembro, y determinaremos luego el régimen transitorio, realmente existente, por la superposición del régimen forzado con el libre ya estudiado:

$$\Theta_t = \Theta_f + \Theta_p$$

El régimen forzado o estacionario está perfectamente determinado, pero para que el régimen propio también lo esté es necesario fijar sus condiciones iniciales Θ_o y v_o . Observemos a este efecto que en el instante inicial $t = 0$ se tiene

$$(\Theta_t)_{t=0} = (\Theta_f)_{t=0} + (\Theta_p)_{t=0} = (\Theta_f)_{t=0} + \Theta_o \qquad (120)$$

$$\left(\frac{d\Theta_t}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{d\Theta_f}{dt}\right)_{t=0} + \left(\frac{d\Theta_p}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{d\Theta_f}{dt}\right)_{t=0} + v_o \qquad (121)$$

ecuaciones que proporcionan Θ_o y v_o. En particular si el órgano móvil parte del cero y del reposo se tiene

$$(\Theta_t)_{t=0} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{d\Theta_t}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

de donde

$$\Theta_o = -(\Theta_f)_{t=0} \qquad (122)$$

$$v_o = -\left(\frac{d\Theta_f}{dt}\right)_{t=0} \qquad (123)$$

En cada caso de los que examinaremos la solución particular que representa el movimiento forzado puede evidentemente determinarse con ayuda del segundo término del miembro de la derecha de las ecuaciones (118) y (119), pero tal cálculo sería inútil, dado que se tratará de expresiones simples de $F(t)$, en cuyo caso es inmediata una solución particular de (11).

14. Par motor constante que se establecè instantaneamente.

$$C_m = gI_1 = Cte = F(t) \qquad (124)$$

Es el caso en que se envía una corriente constante I_1 a un aparato cuyo par motor g, ejercido sobre el órgano móvil por la corriente unidad, es constante.

En lo que sigue supondremos que la constante de tiempo del circuito del galvanómetro es bastante pequeña como para poder admitir que la corriente alcanza instantaneamente su valor de régimen.

La ecuación de movimiento

$$K\frac{d^2\Theta}{dt^2} + A\frac{d\Theta}{dt} + C\Theta = gI_1 \qquad (125)$$

admite como solución particular

$$\Theta_f = C^{te} = \Theta_1 \qquad (126)$$

de donde:

$$\frac{d^2\Theta_f}{dt^2} = \frac{d\Theta_f}{dt} = 0$$

o sea

$$C\Theta_1 = gI_1 \quad \text{y} \quad \Theta_1 = \frac{gI_1}{C} \tag{127}$$

La relación

$$\frac{\Theta_1}{I_1} = \frac{g}{C} \tag{127a}$$

característica del aparato, que representa la rotación estacionaria del órgano móvil para una corriente constante igual a la unidad, define la "sensibilidad en intensidad" del galvanómetro.

En régimen permanente la desviación es pues constante e igual a $\Theta_f = \Theta_1$.

Queda por definir el movimiento propio. Partiendo el galvanómetro del cero y del reposo se aplican las relaciones (122) y (123); por consiguiente

$$\Theta_o = -(\Theta_f)_{t=0} = -\Theta_1 \quad \text{y} \quad v_o = -\left(\frac{d\Theta_f}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

El movimiento propio será pues el del móvil apartado un ángulo $-\Theta_1$ de su posición de equilibrio y abandonado a si mismo

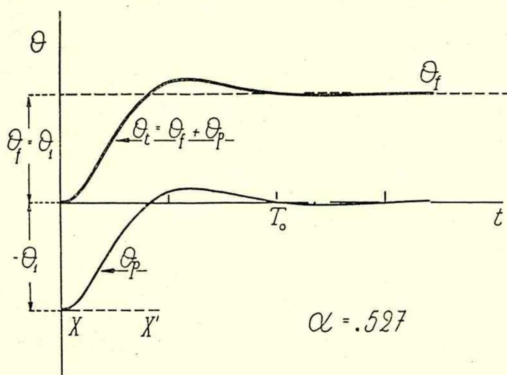


Fig. 16

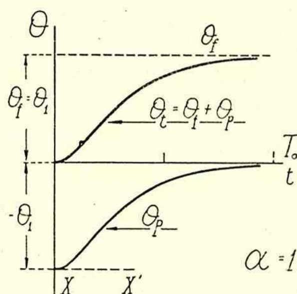


Fig. 17

sin velocidad inicial. Este resultado es fácil de interpretar fisicamente: al enviar corriente al galvanómetro la posición de equilibrio del móvil, de acuerdo con la aproximación hecha, cambia instantaneamente y pasa de $\Theta = 0$ a $\Theta = \Theta_1$: el móvil se encuentra pues en el momento inicial sin velocidad y apartado de un ángulo $-\Theta_1$ de su nueva posición de equilibrio, que alcanza con o sin oscilaciones según el valor del amortiguamiento.

En las figs. 16 y 17 damos $\Theta_f(t)$, $\Theta_p(t)$ y $\Theta_t(t)$ para $\alpha = 0{,}527$ y $\alpha = 1$ respectivamente; en el caso particular examinado de $\Theta_f = C^{te}$ se habría podido evitar el trazado de Θ_t, hubiese bas-

tado una simple traslación del eje de tiempos hasta XX' pero hemos preferido volver a dibujar $\Theta_t(t)$ para mayor generalidad. Se observa inmediatamente que cuando el galvanómetro es lo bastante poco amortiguado como para que su movimiento sea periódico, la desviación Θ sobrepasa, partiendo del reposo, el valor Θ_1 de la desviación final ; el valor máximo de la desviación será

$$\Theta_{max} = \Theta_1 + \Theta_2$$

donde Θ_2 es la segunda elongación en el movimiento propio alrededor de la posición de equilibrio bajo corriente, $\Theta = \Theta_1$.

Desde luego

$$\Theta_2 = \Theta_1 e^{-\lambda}$$

y

$$\Theta_{max} = \Theta_1 (1 + e^{-\lambda}) \qquad (128)$$

En particular, cuando el amortiguamiento es muy pequeño, Θ_{max} es poco inferior a $2\,\Theta_1$; por lo tanto, no es suficiente contentarse con observar la *partida* del índice de un aparato para juzgar su sensibilidad, sino que hay que esperar que haya alcanzado la posición de equilibrio, porque, a igualdad de sensibilidad, el aparato menos amortiguado *parecería* más sensible.

Consideremos ahora el galvanómetro recorrido por una corriente permanente I_1, en estado estacionario, es decir, en el estado en que el móvil se encuentra en equilibrio en la posición Θ_1, y cortemos la corriente. El par motor $C_m = gI_1$ se hace nulo, el cero del aparato vuelve a ser la posición de equilibrio, y el móvil va a volver a él con o sin oscilaciones según el amortiguamiento. El movimiento es el propio del sistema apartado un ángulo Θ_1 de su posición de equilibrio y abandonado sin velocidad inicial.

15. Par motor función del tiempo de la forma $C = at^n$. En el caso en que la corriente es

$$I = m\,t^n \qquad (129)$$

se tiene

$$C_m = g\,m\,t^n = a\,t^n \qquad (130)$$

Este caso se presenta muy sensiblemente p. ej. al registrar con un par termoeléctrico las curvas de calentamiento o enfriamiento de un cuerpo.

La ecuación de movimiento

$$K \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + A \frac{d \Theta}{dt} + C\Theta = a\, t^n \qquad (131)$$

admite como solución particular

$$\Theta = c\, t^n + d\, t^{n-1} + e\, t^{n-2} + \ldots + f\, t^2 + h\, t + l \qquad (132)$$

Los coeficientes c, d, . . . l se encuentran inmediatamente formando $\frac{d\Theta}{dt}$ y $\frac{d^2\Theta}{dt}$, llevándolos a la ecuación (131) e identificando los dos miembros.

Resulta

$$c = \frac{a}{C}$$

$$d = -\frac{a}{C}\frac{An}{C} = -c \cdot \frac{2\alpha n}{w_o}$$

$$e = c \frac{n(n-1)(4\alpha^2 - 1)}{w_o{}^2}$$

....

....

Se ve pues, comparando (129) con (132), que salvo en el caso particular en que $n = 1$, el movimiento del móvil no reproduce rigurosamente la ley de la variación de la corriente, pero se aproxima a ella tanto más cuanto mayor es w_o; es ésta una condición que volveremos a encontrar más adelante, estudiando los oscilógrafos.

Se puede preguntar cual es la influencia de α sobre la fidelidad de la reproducción de la ley de variación de la corriente por el movimiento del órgano móvil. Para fijar mejor las ideas consideremos con más atención el caso particular importante en que $n = 1$, es decir, el caso de la corriente función lineal del tiempo. Este puede ser el caso de ciertos pares termoeléctricos, de ciertos indicadores basados en la variación de la resistencia con la temperatura, etc. Se tiene entonces $n = 1$ y

$$I = m\, t \qquad (129a)$$

$$C_m = a\, t \qquad (130a)$$

$$c = \frac{a}{C}, \; d = -c\frac{2\alpha}{w_o}, \; e = f = \ldots = 0$$

y la solución particular se escribe

$$\Theta_f = \frac{a}{C}\left(t - \frac{2\alpha}{w_o} \right) = \Theta_1 \left(\frac{t}{T_o} - \frac{\alpha}{\pi} \right) \tag{133}$$

poniendo

$$\Theta_1 = \frac{a\,T_o}{C} \tag{134}$$

En régimen estacionario Θ_f, como I, crece linealmente con el tiempo; sin embargo la recta $\Theta_f(t)$ no pasa por el origen (salvo en el caso teórico de $\alpha = 0$, en el que, por otra parte, no se alcanzaría nunca el régimen estacionario); se notará que la ordenada en el origen $-\frac{2\,a\,\alpha}{C w_o}$, negativa, aumenta en valor absoluto con el amortiguamiento. El régimen estacionario se alcanzará con o sin oscilaciones según el valor de α.

Para definir el movimiento en régimen transitorio, Θ_t, nos quedan por determinar las condiciones iniciales del movimiento propio Θ_p. Suponiendo que el sistema parte del cero y del reposo, se tiene, aplicando (122) y (123):

$$\Theta_o = -(\Theta_f)_{t=0} = \frac{\Theta_1\,\alpha}{\pi} \tag{135}$$

y

$$v_o = -\left(\frac{d\,\Theta_f}{dt} \right)_{t=0} = -\frac{a}{C} = -w_o \frac{\Theta_1}{2\pi} \tag{136}$$

En el caso en que $\alpha > 1$ se verifica facilmente que $\frac{\Theta_o b'}{\Theta_o b + v_o} < 1$ de manera que la fórmula (31) se aplica y da

$$\Theta_p = \frac{\Theta_1}{2\pi\sqrt{\alpha^2 - 1}}\, e^{-\alpha \frac{2\pi t}{T_o}}\, sh\left(\sqrt{\alpha^2 - 1}\, \frac{2\pi t}{T_o} + \varphi \right) \tag{137}$$

con

$$\varphi = arcth \frac{2\,\alpha\sqrt{\alpha^2 - 1}}{2\,\alpha^2 - 1} \tag{138}$$

Cuando $\alpha < 1$ se encuentra inmediatamente, aplicando (43):

$$\Theta_p = \frac{\Theta_1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} e^{-\alpha \frac{2\pi t}{T_0}} sen\left(\sqrt{1-\alpha^2}\,\frac{2\pi t}{T_0} + \varphi\right) \qquad (139)$$

con

$$\varphi = arctg \frac{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{2\alpha^2 - 1} \qquad (140)$$

y finalmente si $\alpha = 1$, (27) da

$$\Theta_p = \Theta_1 e^{-\frac{2\pi t}{T_0}} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{t}{T_0}\right) \qquad (141)$$

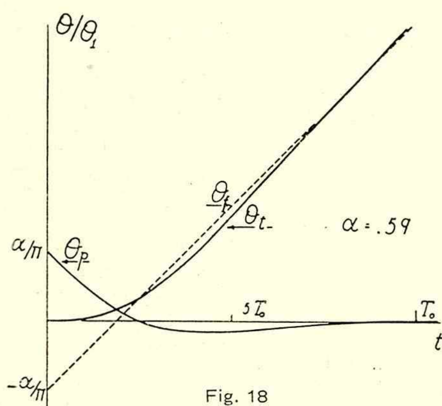


Fig. 18

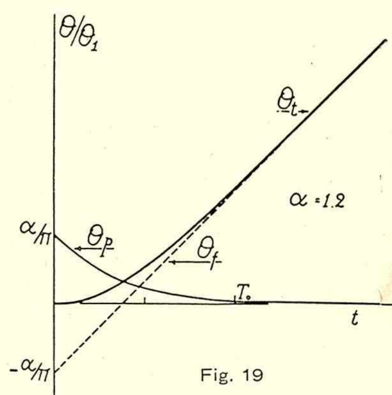


Fig. 19

En las figs. 18 y 19 hemos representado el establecimiento del régimen forzado en el caso de $\alpha = 0{,}59$ y $\alpha = 1{,}2$ respectivamente.

Se ve que Θ_0 disminuye con α, de manera que podría creerse que hay interés en disminuir α, o sea la ordenada en el origen de la recta $\Theta_f\,(t)$, pero entonces la duración del régimen transitorio podría hacerse importante y perturbaría el estudio hecho: en realidad habrá que elegir aquí α de manera que el movimiento propio se extinga lo más rapidamente posible; de acuerdo con lo que se ha visto en **I 8** y **I 11** estudiando el retorno al cero, esta condición hace elegir el amortiguamiento próximo e inferior al crítico. El problema de la elección más conveniente de α, en relación con la fidelidad de la inscripción, se discutirá en forma general al estudiar los oscilógrafos en el capítulo XI.

16. Par motor función sinusoidal del tiempo. Es el caso en que la corriente que atraviesa el galvanómetro es sinusoidal

$$I = I_m \left(sen\, \Omega\, t + \varphi \right) \qquad (142)$$

Resulta entonces

$$C_m = g\, I_m\, sen\, (\, \Omega\, t + \varphi\,) \qquad (143)$$

y

$$K \frac{d^2\, \Theta}{dt^2} + A \frac{d\, \Theta}{dt} + C\, \Theta = g\, I_m\, sen\, (\, \Omega\, t + \varphi\,) \qquad (144)$$

La solución particular es

$$\Theta = \Theta_m\, sen\, (\, \Omega\, t + \varphi + \psi\,) \qquad (145)$$

Encontraremos facilmente las constantes Θ_m y ψ gracias al empleo de las magnitudes complejas. Pongamos

$$I = I_m\, e^{\,j\,(\,\Omega\, t + \varphi\,)}$$

y

$$\Theta = \Theta_m\, e^{\,j\,(\,\Omega\, t + \varphi + \psi\,)}$$

resulta

$$\frac{d\, \Theta}{dt} = j\, \Omega\, \Theta_m\, e^{\,j\,(\,\Omega\, t + \varphi + \psi\,)}$$

y

$$\frac{d^2\, \Theta}{dt^2} = -\, \Omega^2\, \Theta_m\, e^{\,j\,(\,\Omega\, t + \varphi + \psi\,)}$$

de manera que reemplazando en la ecuación del movimiento (144) y simplificando

$$\Theta_m\, e^{\,j\,\psi} \left[\, (\, C - K\, \Omega^2\,) + j\, A\, \Omega\, \right] = g\, I_m \qquad (146)$$

de donde

$$\Theta_m = \frac{g\, I_m}{K} \, \frac{1}{\sqrt{(\, w_o{}^2 - \Omega^2\,)^2 + 4\, b^2\, \Omega^2}} \qquad (147)$$

o aún

$$\Theta_m = \frac{g\, I_m}{C} \, \frac{1}{\sqrt{(\, 1 - x^2\,)^2 + 4\, \alpha^2\, x^2}} \qquad (148)$$

con

$$x = \frac{\Omega}{w_o} \qquad (149)$$

$$\psi = - \, arctg \, \frac{2 \, b \, \Omega}{w_o{}^2 - \Omega^2} = - \, arctg \, \frac{2 \, \alpha \, x}{1 - x^2} \qquad (150)$$

El movimiento estacionario es sinusoidal, defasado un ángulo ψ atras del par que lo produce. La amplitud del movimiento es proporcional a la de la corriente.

El movimiento transitorio se obtiene como siempre, sumando al movimiento forzado el propio, que dependerá evidentemente del valor de φ, es decir, del valor de la corriente (por lo tanto del par) en el instante inicial. Si el sistema parte del cero y del reposo se tiene a partir de (122) y (123):

$$\Theta_o = - \, (\, \Theta_f \,)_{t=0} = - \, \Theta_m \, sen \, (\, \varphi + \psi) \qquad (151)$$

y

$$v_o = - \left(\frac{d\Theta_f}{dt} \right)_{t=0} = - \, \Theta_m \, cos \, (\, \varphi + \psi) \qquad (152)$$

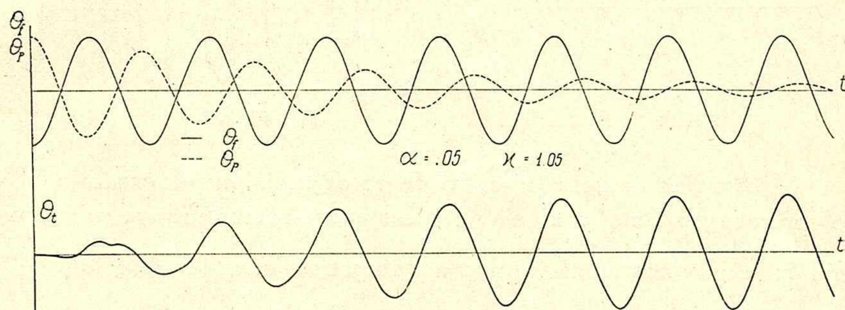


Fig. 20

Examinemos p. ej. el caso en que Θ_o es mínimo, es decir, el caso en que se cierra el circuito en un instante tal que sen $(\varphi + \psi) = 1$; se tiene entonces $cos \, (\, \varphi + \psi \,) = 0$ y $v_o = 0$: el movimiento propio será el de un móvil desviado $- \, \Theta_m$ de su posición de equilibrio y abandonado sin velocidad inicial. Las figuras 20, 21 y 22 representan el establecimiento del régimen forzado en los casos en que

$$\alpha = 0{,}05 \qquad x = 1{,}05$$
$$\alpha = 0{,}9 \qquad x = 0{,}1$$
$$\alpha = 0{,}9 \qquad x = 10$$

respectivamente. Es instructivo comparar las figs. 21 y 22 que ponen bien en evidencia la influencia sobre la inscripción, a igual-

dad de grado de amortiguamiento, de la relación x entre la frecuencia de la función estudiada y la ideal del aparato ; se observará que para que el registro sea fiel x debe ser tan pequeña como sea posible, condición ya mencionada más arriba, y que volveremos a encontrar estudiando los oscilógrafos.

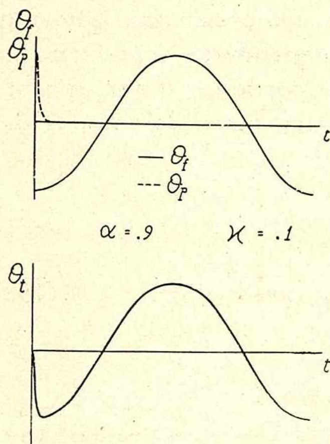


Fig. 21

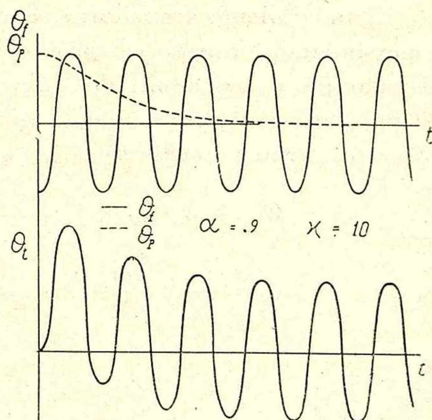


Fig. 22

Al estudiar el galvanómetro de resonancia, en el capítulo VII, volveremos en detalle al estudio del aparato sometido al par sinusoidal ; aquí nos limitaremos a demostrar que la relación $\frac{\Theta_m}{I_m}$ puede hacerse considerable.

Supongamos que a valores de α y w_o dados se haga variar x obrando sobre la frecuencia de la corriente que se envía al galvanómetro. El valor x_m de x que anula $\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\Theta_m}{I_m}\right)$ es, a partir de (148):

$$x_m = \sqrt{1-2\alpha^2} \tag{153}$$

Con el modo de variación de x admitido, no habrá pues máximo de $\frac{\Theta_m}{I_m}$ si $\alpha > 0{,}707$ o aún $b > 0{,}707\ w_o$.

Se tiene para $x = x_m$

$$\left(\frac{\Theta_m}{I_m}\right)_{max} = \frac{g}{C}\ \frac{1}{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \tag{154}$$

Supongamos ahora que a valores de α y Ω dados se haga variar w_o obrando sobre el par director unitario C. Se tiene entonces a partir de (147): $\frac{\delta}{\delta w_o}\left(\frac{\Theta_m}{I_m}\right) = 0$ para

$$w_o = \Omega \tag{155}$$

o sea para $x = 1$, y

$$\left(\frac{\Theta_m}{I_m}\right)_{max} = \frac{g}{C}\frac{1}{2\alpha} \tag{156}$$

Se ve que para α pequeño $\left(\frac{\Theta_m}{I_m}\right)_{max}$ puede hacerse muy grande; ahora bien, $\frac{\Theta_m}{I_m}$ no es otra cosa que la sensibilidad del galvanómetro, el que, construído en consecuencia, y provisto de un dispositivo de regulación de C, será pues susceptible de acusar corrientes alternas de muy pequeña amplitud, tomando entonces el nombre de galvanómetro de resonancia.

La elección de α no influye solamente sobre la sensibilidad, como lo veremos en el capítulo VII. Limitemosnos a observar aquí que la duración del retorno al cero referida al período ideal es considerable cuando α es muy pequeña; así p. ej. aplicando la relación (117) se encuentra para $\alpha = 0{,}005$, $t_r = 146\, T_o$ si $n = 100$ y $t_r = 72\, T_o$ si $n = 10$; lo que da, haciendo p. ej. $T_o = 0{,}02$ s, $t_r \cong 3$ s. y $\sim 1{,}5$ s. respectivamente.

17. Par motor función periódica cualquiera del tiempo. Aplicando el desarrollo en serie de Fourier, el par motor podrá ser puesto bajo la forma

$$C_m = C_{med} + \Sigma\, C_h\, sen\,(h\,\Omega\, t + \varphi_h) \tag{157}$$

La solución particular se obtendrá facilmente como suma de las soluciones particulares relativas cada una a un sólo término del segundo miembro. Nos vemos así conducidos a los casos ya estudiados anteriormente.

18. Elección del amortiguamiento en los aparatos de medida. Hay que distinguir entre los aparatos de medidas eléctricas industriales, indicadores y registradores, por una parte, y los aparatos de laboratorio, galvanómetros y oscilógrafos, por otra. Aunque en esta obra no estudiaremos en realidad los aparatos industriales, diremos aquí algunas palabras sobre la elección de su grado de

amortiguamiento, a título de ilustración del estudio del retorno al cero hecho más arriba, y también para subrayar mejor la comunidad de base de estos aparatos con los galvanómetros; así en los aparatos industriales de medida graduados directamente, el movimiento, que se ha hecho practicamente independiente de la constitución de circuito de medida, debe ser periódico, para saber con certeza que la aguja se ha detenido en su posición de equilibrio y no en una posición cualquiera a causa de frotamientos accidentales. ¿Qué número de oscilaciones elegir? Para un valor dado de α, el número de oscilaciones apreciables depende de $n = \frac{\Theta_{max}}{\Theta_{min}}$, o sea de Θ_{max}, porque Θ_{min} es una constante del aparato. Así, si se quiere que la cuarta elongación sea visible para $\Theta_{max} = 1000\,\Theta_{min}$ (o sea $\Theta_{max} = 100$ divisiones si, siendo la escala proporcional, se puede apreciar 0,1 de división) α deberá estar comprendido entre 0,59 y 0,48 (fig. 12). Adoptemos para fijar ideas $\alpha = 0{,}55$, o sea $\lambda = 2{,}06$: se ve que para $\Theta_{max} = 100\,\Theta_{min}$, tres elongaciones solamente son aún visibles; continuando la disminución de Θ_{max} se llega al instante en el que el aparato parece aperiódico, con n definido por la relación (103):

$$\lambda_1 = log_e\, n = 2{,}06 \quad \text{de donde} \quad n_1 \cong 8\,.$$

Tal estado de cosas es favorable, porque si se quiere poder seguir las pequeñas y a menudo rápidas variaciones de la corriente, el aparato debe funcionar en condiciones próximas a las del retorno al cero más rápido; un número importante de oscilaciones haría las medidas poco cómodas y aún poco seguras. Se concibe pues que en los aparatos registradores habrá que elegir α mucho mayor que 0,55 con el fin de que una variación bastante importante de la corriente, correspondiente, p. ej. a $30 - 50\ \Theta_{min}$, provoque aún un retorno al cero sin oscilaciones y lo más rapidamente posible; tomando $50\ \Theta_{min}$ se encuentra $\alpha \cong 0{,}68$.

Volvamos al aparato indicador Adoptando $\alpha = 0{,}55$ para $n = 1000$ se encuentra $t_r \cong 2\ T_0$, o sea $t_r \cong 2{,}5\ T_0$ para tener en cuenta que el ojo debe continuar la observación para asegurarse que se ha llegado al cero. Se tiene generalmente interés en reducir la duración de la lectura, aunque no se puede exagerar en este camino. En muchos aparatos, para $n = 1000$, t_r es del orden de 2 — 4 s.; supongamos $t_r = 4$ s. para fijar las ideas: se

deduce $T_0 = \frac{t_r}{2,5} = 1,6$ s., valor que con $\alpha = 0,55$ y otras magnitudes, como la sensibilidad, define la construcción racional del aparato, es decir, la elección de A, K, C, g.

Para definir bien las características de lectura de un aparato es necesario pues indicar Θ_{min}, t_r para un valor dado de n, y α. Sin duda se puede reemplazar una cualquiera de las magnitudes anteriores por otra de la que se deduzca la primera; así en lugar de α se puede fijar λ, o también

$$1 + e^{-\lambda} = \frac{\Theta_{max}}{\Theta_1} \qquad (138)$$

relación entre la desviación máxima alcanzada cerrando el circuito bajo una corriente constante, y la desviación estacionaria correspondiente [véase la publicación C-28 de la U. S. E.].

La sola indicación del valor de t_r es insuficiente porque a igualdad de t_r el equilibrio puede alcanzarse después de un número más o menos grande de oscilaciones, lo que no es indiferente.

En el estudio hecho se han supuesto A, K, C, y g constantes. Se han hecho reservas a propósito de la constancia de A y de C; hay que hacerlas también a propósito de las otras magnitudes, al menos en algunas circunstancias. Así el valor de K no es el mismo si el órgano móvil se mueve en el aire o en aceite; por otra parte g solo puede considerarse como constante si el aparato no contiene hierro. Cuando hay hierro el estudio se hace complicado: el movimiento en el caso de la apertura del circuito, en que g no interviene, no se indentifica más con el de cierre del circuito bajo corriente constante, en que g interviene. *Illiovici* demostró que en los aparatos que tienen hierro, el amortiguamiento aparente es superior al abrir el circuito que al cerrarlo, y hay que tener esto en cuenta en el establecimiento racional de estos aparatos.

En lo que se refiere a los galvanómetros de corriente continua y alterna, aparatos particularmente sensibles, no graduados directamente y cuyo movimiento está a menudo fuertemente influenciado por la naturaleza del circuito al que están conectados, discutiremos más adelante las condiciones de amortiguamiento más convenientes; será lo mismo para los oscilógrafos.

BIBLIOGRAFÍA

1. **H. Armagnat** — Instruments et méthodes de mesures électriques — Gauthier - Villars, Paris, 1902.
2. **G. Bruhat** — Cours de mécanique physique — Masson, Paris, 1933.
3. **S. Gerszonowicz** — *Bol. Fac. Ing. Montevideo*, N.° 8, p. 460, 1939 o *Rev. Electr.* t. 26, p. 165, 1940.
4. **A. Illiovici** — *Bull. S. F. E.*, 5 s., t. 9., p. 355, 1939.
5. **W. Jaeger** — Handbuch der Physik, t. 16, p. 201 — Springer, Berlin, 1927.
6. **F. A. Laws** — Electrical Measurements — Mc Graw-Hill, New York, 1917.
7. **O. Werner** — Empfindliche galvanometer — de Gruyter, Berlin, 1928.
8. **H. Zöllich** — *Wiss. Ver. Siemens-Konz.*, t. 1, p. 24, 1920 y t. 2, p. 378, 1922.

CAPITULO II.

Galvanómetros de imán móvil para corriente continua.

Los galvanómetros de imán móvil fueron los primeros que se emplearon en corriente continua, pero desde hace algún tiempo han sido practicamente desplazados por los de cuadro móvil. Dividiremos pues el estudio de los galvanómetros de imán: daremos en este capítulo principios generales y describiremos diversos tipos de estos aparatos; haremos lo mismo en el capítulo III para los galvanómetros de cuadro móvil, y pasaremos finalmente en el capítulo IV al estudio de diversos puntos comunes a los dos aparatos y al estudio comparado de sus mejores condiciones de empleo, así como de sus ventajas e inconvenientes.

1. Principio de los galvanómetros de imán móvil. — Estos aparatos derivan del multiplicador de *Schweigger*, que consiste en un cuadro rectangular vertical, orientado en el meridiano magnético, en cuyo interior se suspende una aguja magnética.

Vamos a estudiar el principio de su funcionamiento considerando, para simplificar, una espira vertical, circular, de radio a. Dispongamos sobre su eje una varilla cilíndrica imantada, sostenida en su centro por un pivote, o mejor suspendida de un hilo sin torsión; sea x la distancia del centro del imán al de la espira. Llamemos M al momento magnético de la varilla, que asimilaremos a un dipolo de longitud l. El valor de l es incierto, pero felizmente interviene solo en los términos correctivos; se toma general-

mente $l = l'$ o $l = \frac{5}{6} l'$, donde l' representa la longitud de la varilla.

Supongamos la espira orientada en el plano del meridiano magnético; al desviar el imán un ángulo Θ de su posición de equilibrio, el par director ejercido por la componente horizontal H_t del campo magnético terrestre es

$$C_d = H_t \, M \, sen \, \Theta \qquad (1)$$

La espira recorrida por una corriente I ejercerá sobre el imán un par motor

$$C_m = 2 \pi M I \cos \Theta \frac{a^2}{r^3} \left\{ 1 + \frac{3 \, l^2}{r^4} \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \left(1 - 5 \, sen^2 \Theta \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{45}{64} \frac{l^4}{r^8} (a^4 - 12 a^2 x^2 + 8 x^4) (1 - 14 \, sen^2 \Theta + 21 \, sen^4 \Theta) + ... \right\} \qquad (2)$$

donde $r^2 = a^2 + x^2$.

Si se admite que la longitud del imán es despreciable frente a r, la expresión (2) se simplifica considerablemente, transformándose en

$$C_m = M G I \cos \Theta \qquad (2a)$$

con

$$G = \frac{2 \pi a^2}{r^3} \qquad (3)$$

GI representa el campo creado por la espira en el punto de sostén del imán; si éste no fuera horizontal, M designaría la componente horizontal de su momento magnético.

Si consideramos ahora una bobina de n espiras, de sección transversal rectangular de dimensiones $2b$ en la dirección del eje y $2c$ en la dirección radial, y de radio medio a, siempre que b y c sean muy pequeñas frente a a se puede admitir que todas las espiras crean el mismo campo al nivel del imán supuesto siempre de longitud despreciable, o sea

$$G = \frac{2 \pi n a^2}{r^3} \qquad (3a)$$

Si b y d no son despreciables frente a a, pero suponemos que todas las espiras son circulares con sus planos normales al eje común, una simple integración da el valor de G

$$G = 2\pi n \left\{ (x+b) \log_e \frac{a+d+\sqrt{(x+b)^2+(a+d)^2}}{a-d+\sqrt{(x+b)^2+(a-d)^2}} - \right.$$

$$\left. - (x-b) \log_e \frac{a+d+\sqrt{(x-b)^2+(a+d)^2}}{a-d+\sqrt{(x-b)^2+(a-d)^2}} \right\} \qquad (4)$$

a emplearse en vez de (3a).

Los galvanómetros de imán móvil se han empleado para medidas absolutas y relativas; según el caso, el principio de su construcción es diferente.

Si se quiere utilizar el aparato para medidas absolutas, lo fundamental es poder calcular muy exactamente el par motor. No solamente se tendrán en cuenta los términos correctivos de (2) debidos a que ya no puede considerarse despreciable la longitud del imán, sino que la expresión se complica todavía más debido a que tampoco se pueden despreciar las dimensiones de la sección transversal de la bobina frente al radio (véase *B***9** o *B***11**). Si el imán está dispuesto en el centro de la bobina ($x = 0$), se tiene la brújula de tangentes (*Pouillet*); para eliminar el segundo término del desarrollo de la relación (2), *Gaugain* adoptó $x = \frac{a}{2}$, disposición perfeccionada por *Helmholtz* quien agregó otra bobina, idéntica y coaxial a la primera, del otro lado y a la misma distancia del imán.

En los aparatos destinados a medidas absolutas, con el fin de hacer los términos correctivos tan pequeños como sea posible y evitar que un error en la medida de las dimensiones se traduzca en un error importante en la medida de la corriente, ha sido necesario adoptar a muy grande; por lo tanto la sensibilidad del aparato es pequeña. Notemos de paso que la medida absoluta de la intensidad por este método carece actualmente de interés, porque es poco precisa, fundamentalmente a causa de la indeterminación en el valor de H_t.

En los aparatos destinados a las medidas relativas—y son los únicos de los que nos ocuparemos aquí — el cálculo muy exacto del par C_m no interesa, puesto que el aparato se calibra experimentalmente (véase el capítulo VI); lo que se busca ante todo es aumentar la sensibilidad, disminuyendo a este efecto el radio de la bobina para acercar las espiras al imán. Los ángulos de desviación son siempre muy pequeños; con el fin de apreciarlos se fija sobre la suspensión un espejo que permite medir Θ por el

método óptico (véase IV, 1). En tal caso se puede admitir que el campo creado por la bobina es uniforme en la región en la que se mueven los polos del imán. Además, ya que como dijimos el valor muy exacto de C_m no interesa, supondremos en lo que sigue que el campo al nivel de los polos del imán es el mismo que en el punto de suspensión; dicho de otra manera, admitiremos válida la relación (2a).

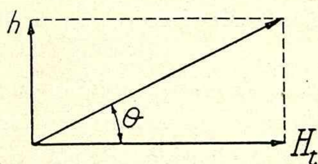


Fig. 1

La posición de equilibrio del imán está definida por $C_m = C_d$, o sea, despreciando el par de torsión de la suspensión

$$M\, G\, I \cos \Theta = H_t\, M \operatorname{sen} \Theta$$

de donde

$$tg\, \Theta = \frac{G}{H_t} I \qquad (5)$$

lo que se expresa frecuentemente diciendo que el vector momento magnético del imán se orienta según la dirección y en el sentido del campo resultante de la composición de H_t y $h = GI$ (fig. 1).

El ángulo Θ es muy pequeño, de modo que confundiendo $tg\, \Theta$ con Θ la expresión de la sensibilidad se escribe

$$\frac{\Theta}{I} = \frac{G}{H_t} \qquad (6)$$

Si el par de torsión no fuese despreciable, se tendría evidentemente, designando por C la constante de torsión del hilo de suspensión y expresando que la posición de equilibrio queda definida por la condición $C_m = C_d$

$$M\, G\, I \cos \Theta = C\, \Theta + M\, H_t \operatorname{sen} \Theta$$

o sea, siendo Θ muy pequeño

$$\frac{\Theta}{I} = \frac{M\, G}{M\, H_t + C} \qquad (7)$$

Para aumentar la sensibilidad será necesario disminuir C y H_t y aumentar M y G; generalmente C es despreciable, en cuyo caso solo es posible actuar sobre H_t y G.

2. Estudio de la bobina. — La primera cuestión que se presenta es la forma a dar a la sección generatriz de la bobina, que es de revolución, para obtener el máximo de campo a igualdad

de longitud del hilo enrollado, o aún, siendo constante el diámetro del hilo, a igualdad de resistencia de la bobina. El problema ha sido resuelto por *Maxwell.* Consideremos una espira circular S recorrida por una corriente I; sea ϱ la distancia entre un punto O situado sobre el eje de la espira y un elemento de longitud dl de ésta (fig. 2): el campo creado en O por dl es $dH = \frac{I\,dl}{\varrho^2}$ y su proyección sobre el eje XX' de la bobina es

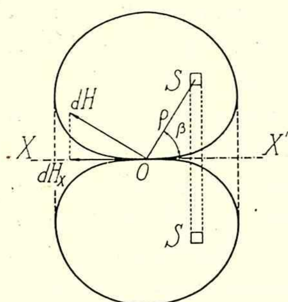


Fig. 2

$$d H_x = \frac{I\,dl}{\varrho^2} \operatorname{sen} \beta$$

siendo β el ángulo hecho por ϱ con OX'.

El campo específico, por unidad de longitud y de corriente, es

$$\frac{d H_x}{I\,dl} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\varrho^2}$$

Tracemos la curva

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_1{}^2} = Cte \qquad (8)$$

que forma una sección generatriz: todas las espiras comprendidas en el interior de esta curva producen una acción específica superior a $\frac{1}{\varrho_1{}^2}$, mientras que las espiras colocadas en el exterior producen una acción específica inferior a $\frac{1}{\varrho_1{}^2}$.

La forma óptima de la bobina se obtiene pues haciendo girar la curva $\frac{\operatorname{sen} \beta}{\varrho^2} = Cte$ alrededor del eje XX'; en efecto, si el contorno de la sección de una bobina es diferente, a igualdad de área, de la curva representada por (8), se aumentará la acción desplazando las espiras del exterior al interior de la curva, o sea llevando la secciòn a la forma (8). Se preven evidentemente aberturas para alojar el imán y la suspensión; la cavidad prevista para la ubicación del imán es generalmente cilíndrica; es interesante notar que si no fuera así, por querer aprovechar todo el espacio posible para la producción del campo, podría ocurrir en determinados casos que la acción de ciertas espiras que se encuentran

muy cerca de los polos sería de sentido contrario a la del conjunto de la bobina. La demostración fué hecha por *Ayrton, Mather* y *Sumpner* por sencillas consideraciones sobre la distribución de las líneas de fuerza.

¿Hasta qué punto se puede hacer crecer el campo creado por la bobina? La cavidad interior queda determinada por el espacio necesario al movimiento del imán y eventualmente por la acción contraria de ciertas espiras que acabamos de mencionar. En lo que se refiere a la dimensión exterior, que podemos caracterizar por su valor máximo ϱ_1, hay que distinguir dos casos. En el primero consideraremos constante la corriente en el circuito; G es entonces tanto mayor cuanto mayores son ϱ_1 y el número de espiras, o sea cuanto menor es el diámetro del hilo a ϱ_1 dado. No hay otro límite para ϱ_1 que las consideraciones referentes al espacio ocupado, peso y precio. En el segundo caso consideraremos constante la f. e. m. en el circuito. Al agregar entonces una nueva capa se aumenta en $\triangle G$ la constante de la bobina y en $\triangle R$ su resistencia; ahora bien, si el diámetro del hilo es constante, como se ha supuesto implicitamente hasta ahora, $\triangle G$ disminuye mientras que $\triangle R$ aumenta con ϱ_1 y llega fatalmente un momento en que la disminución de la corriente, consecuencia del aumento de la resistencia, se traduce por una disminución del campo que sobrepasa el aumento del mismo debido a $\triangle G$; agregando una capa nueva se obtiene así un efecto contrario al perseguido. En cambio si consentimos en hacer crecer el diámetro del hilo con ϱ_1 se puede buscar en que condiciones el efecto resultante es máximo. *Maxwell* demostró que si la relación del diámetro del hilo al espesor de su aislante es constante para todas las capas, el diámetro del hilo debe crecer proporcionalmente a ϱ_1; el crecimiento debe ser menos rápido si el espesor del aislante es constante, independiente del diámetro del hilo. Pero aún así se gana muy poco agregando capas nuevas en cuanto ϱ_1 se hace algo importante frente a la dimensión del espacio libre interior de la bobina.

Practicamente, por razones de simplicidad de construcción, y salvo casos especiales, se da a la bobina una sección transversal rectangular, aproximándola lo más posible a la óptima (fig. 9, pág. 71). En muchos aparatos se han empleado bobinas de varias capas de diámetro diferente cada una.

En resumen, si bien el estudio de la acción de la bobina permitió una construcción más racional del aparato, en lo que se refiere al aumento de la sensibilidad no es posible obrar por aumento de G más allá de ciertos límites Veamos ahora la acción sobre el campo director.

3. **Imán corrector.** — Se podría disminuir el campo director compensando parcialmente el campo terrestre con un imán corrector convenientemente orientado (*Melloni*), pero es fácil ver que el procedimiento presenta un inconveniente importante. Sea en efecto H_c el campo corrector que forma un ángulo $\pi - \beta$ con la componente horizontal del campo terrestre H_t; el campo director resultante está en H_r (fig. 3):

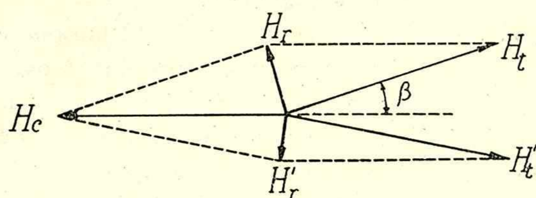


Fig. 3

$$H_r^{\,2} = H_c^{\,2} + H_t^{\,2} - 2\, H_t\, H_c \cos \beta$$

Para un valor dado de β, H_r es mínimo para

$$H_c = H_t \cos \beta \qquad \text{con} \qquad H_{r_{min}} = H_t \operatorname{sen} \beta$$

Conviene hacer β pequeño con el fin de reducir H_r; sin embargo β no debe ser inferior a cierto valor. En efecto, supongamos que el campo H_t varíe en dirección y vaya a H'_t: si el ángulo de variación es superior a β (fig. 3), el nuevo campo resultante H'_r es sensiblemente opuesto a H_r y el imán gira un ángulo próximo a 180°.

Ahora bien, el campo terrestre varía continuamente en magnitud y dirección, de manera que no se puede disminuir demasiado β, y por consiguiente H_r, sin correr el riesgo de una inestabilidad inadmisible del cero del aparato. Pero aún descartado este riesgo, la posición del cero y la sensibilidad varían continuamente, dependiendo estas variaciones de los valores de H_c y β y de los cambios de H_t en magnitud y dirección; para hacer el cero y la sensibilidad más estables hubiera sido necesario poner en fase el campo corrector y el terrestre, pero así disminuiríamos la sensibilidad y se trata de aumentarla. Es solamente por el empleo del sistema astático y de las pantallas magnéticas que se ha podido alcanzar una sensibilidad muy grande, al mismo tiempo que un cero del aparato más estable.

Es también necesario tener en cuenta la acción de la temperatura, cuyo aumento disminuye el momento magnético del imán director y de los imanes del sistema móvil.

4. **Sistema astático.** — Un sistema astático es un sistema de imanes de momento resultante nulo, o sea en equilibrio indiferente en todo campo uniforme; en su forma más simple está constituído por dos imanes solidarios cuyos ejes son paralelos, de momentos magnéticos iguales y opuestos (fig. 4).

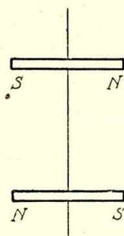


Fig. 4

Con un sistema astático perfecto el campo terrestre, que se puede suponer uniforme en el espacio ocupado por el sistema, no ejercería ninguna acción directora; sería pues necesario prever un par director mecánico (hilo de torsión) o mejor magnético (imán permanente director): siendo este par constante, el problema de la estabilidad del cero quedaría resuelto. En realidad, sin embargo, las componentes horizontales M_1 y M_2 de los momentos magnéticos de los dos imanes tienen valores próximos pero no iguales, y forman entre sí un ángulo γ, próximo pero no igual a π (fig. 5). El sistema posee pues un momento resultante

$$M_r = \sqrt{(M_1 - M_2)^2 + 4\, M_1\, M_2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \qquad (9)$$

y se orientará en un campo uniforme de manera que M_r coincida con la dirección del campo. Ahora bien, teniendo M_1 y M_2 valo-

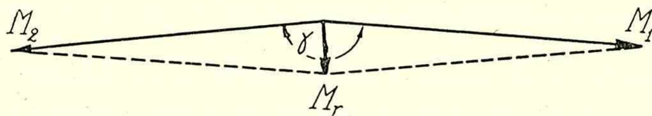


Fig. 5

res casi iguales y siendo γ próximo a π, se puede admitir aproximadamente que M_r es normal a la dirección supuesta común de los imanes; estos últimos se orientarán pues normalmente a las líneas de fuerza de un campo uniforme en el que estuviesen colocados, en oposición al sistema perfecto, que se encontraría allí en equilibrio indiferente. El campo magnético terrestre obra solamente sobre M_r; el par director

$$C_d = M_r\, H_t \operatorname{sen} M_r\, ,\, H_t \qquad (10)$$

es mucho más pequeño que el $C_d = M_1\, H_t \operatorname{sen} M_1\, ,\, H_t$ que se ten-

dría con un solo imán; la sensibilidad aumenta pues considerablemente, pero mientras el par del campo terrestre sea el único director, la inestabilidad del cero será la misma que en un aparato de un solo imán.

Para mejorar la estabilidad del cero es necesario sacrificar en parte la sensibilidad. Agreguemos un par director constante, debido casi siempre a la acción de un imán permanente, porque entonces es muy fácil hacer variar dicho par cambiando la posición del imán director. La sensibilidad disminuye, pero la estabilidad aumenta tanto más cuanto más pequeño es el par ejercido por el campo terrestre frente al adicional constante. Se concibe que para conservar a la vez una sensibilidad muy alta y una estabilidad suficiente, el sistema debe ser tan perfectamente astático como sea posible. Cabe notar que si bien se disminuye así considerablemente el efecto de los campos magnéticos perturbadores uniformes, quedan los campos no uniformes, cuyo efecto se combate reduciendo las dimensiones del sistema astático por una parte y por el empleo de las pantallas magnéticas por otra.

5. Pantallas magnéticas. — Las pantallas son generalmente de forma esférica o cilíndrica, agregándose bases en este último caso, a menos que la relación de la altura al diámetro interior sea considerable; las aberturas deben reducirse al mínimo. El estudio teórico de la acción de las pantallas es muy complejo (*du Bois*, *Wills* y otros); los fenómenos no pueden considerarse como completamente aclarados. La protección es función de la forma de la pantalla y de μ_i, permeabilidad inicial, relativa a campos muy pequeños. La acción protectora, es decir, la relación entre el campo exterior a la pantalla y el campo interior, es mucho mayor si se colocan varias pantallas separadas entre sí por intervalos determinados de aire, que con una pantalla única de espesor igual a la suma de los de las pantallas separadas; sin embargo, no hay ventaja en llevar la subdivisión más allá de ciertos límites; se emplean bastante frecuentemente 3 pantallas.

Hay evidentemente interés en emplear materiales de gran permeabilidad inicial: en algunos aceros μ_i es del orden de 100 — 350 y se puede obtener un campo interior del orden de un milésimo del exterior contra cuya variación se quiere protejer. Existen aleaciones especiales como el permalloy, mu-metal, etc, para los que se han indicado valores de μ_i superiores a 10000 (80000

para el mu-metal, que presenta además la ventaja de ser relativamente liviano), pero la acción protectora no aumenta en proporción.

La acción de la pantalla es evidente: al reducir H_t lo suficientemente como para justificar la adjunción de un imán director, permite aumentar a la vez la sensibilidad y la estabilidad del cero. *Du Bois* y *Rubens* emplearon en su galvanómetro no-astático tres pantallas, la primera cilíndrica y las dos interiores esféricas (fig. 6); entre estas dos últimas se colocó un par de imanes directores cuya orientación se podía variar del exterior.

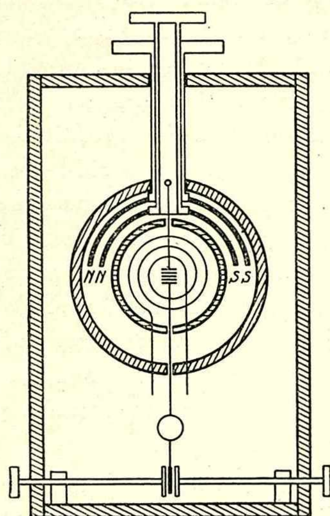


Fig. 6

Nicols y Williams construyeron un galvanómetro del tipo del de *Lord Kelvin* (véase **II, 8**) de cuatro bobinas con tres pantallas cilíndricas.

La sensibilidad obtenida utilizando a la vez el sistema astático y las pantallas magnéticas es extraordinariamente elevada; así p. ej. para el galvanómetro modelo *Paschen - Hill* la casa Cambridge indica una sensibilidad práctica (véase **IV, 6**) de $7{,}5 \cdot 10^{-12}$ mA/mm llegando así al límite natural de la sensibilidad (**IV, 15**).

6. Galvanómetro de Nobili. — El primer galvanómetro en que se aplicó el sistema astático fué el de *Nobili*. El imán M_2 estaba colocado en el exterior y el imán M_1 en el centro de la bobina (fig. 7). Los pares ejercidos por la bobina sobre M_1 y M_2 (el primero mucho más grande que el segundo) concuerdan para hacer girar el sistema en el mismo sentido.

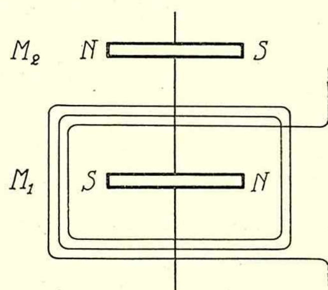


Fig. 7

Supongamos el sistema dispuesto en tal forma que, por la acción del campo terrestre sobre M_2 y en ausencia de corriente, el imán M_1 se encuentra en un plano paralelo al plano de las espi-

ras (fig. 8). Enviemos una corriente I a la bobina; el par motor es, designando por Θ al ángulo que ha girado el sistema móvil:

$$C_m = I\,[\,M_1\,G_1\,sen\,M_1\,,G_1 + M_2\,G_2\,sen\,M_2\,,\,G_2\,] =$$

$$= I\,[\,M_1\,G_1\cos\Theta - M_2\,G_2\cos(\gamma + \Theta)\,] \qquad (11)$$

La posición de equilibrio del sistema está definida por la condición $C_m = C_d$, o sea por

$$I\,[\,M_1\,G_1\cos\Theta - M_2\,G_2\cos(\gamma + \Theta)\,] = M_r\,H_t\,sen\,\Theta \qquad (12)$$

de donde

$$tg\,\Theta = \frac{I\,(\,M_1\,G_1 - M_2\,G_2\cos\gamma\,)}{M_r\,H_t + M_2\,G_2\,I\,sen\,\gamma} \qquad (13)$$

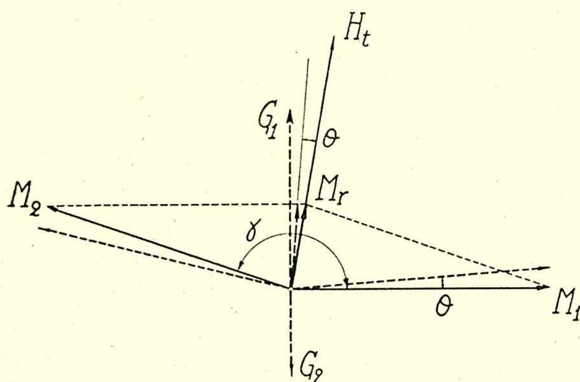


Fig. 8

Se ve pues que aún haciendo abstracción de que G_1 y G_2 no son en todo rigor independientes de Θ, no hay proporcionalidad entre $tg\,\Theta$ (que se puede generalmente confundir con Θ) e I, salvo si $\gamma = \pi$. Este resultado persiste si $G_1 \cong G_2$ como ocurre en muchos otros tipos de galvanómetros de imán que estudiaremos más adelante. Por consiguiente, a menos de servirse del galvanómetro como de aparato de cero, es necesaria su calibración en toda la escala. En primera aproximación la sensibilidad es, haciendo $\gamma = \pi$,

$$\frac{\Theta}{I} = \frac{M_1\,G_1 + M_2\,G_2}{M_r\,H_t} \qquad (14)$$

Se observará que hay interés en hacer M_1 y M_2 grandes con el fin de elevar la sensibilidad. Para eso es necesario aumentar la sección y sobre todo la longitud de los imanes; se está limitado en este sentido por el aumento del momento de inercia, o sea del período, por una parte, y por el aumento del espacio interior de la bobina, lo que reduce G_1 y G_2, por otra. Veremos más adelante

las soluciones particulares adoptadas por *Lord Kelvin* (II, 8) por *Weiss* (II, 10), por *Rosenthal* y *Gray* (II, 12).

7. Amortiguamiento. Ecuación del movimiento. — El movimiento de los imanes provoca una variación del flujo que éstos envían a través de la bobina, en la que se induce una f. e. m.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{d\Theta} \cdot \frac{d\Theta}{dt} \qquad (15)$$

Si despreciamos el coeficiente de self-inducción y llamamos R a la resistencia total del circuito de la bobina, que suponemos cerrado, la corriente inducida es

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{d\Theta} \frac{d\Theta}{dt} \qquad (16)$$

Notemos ahora que las expresiones del par motor C_m dadas más arriba, pueden ponerse bajo la forma

$$C_m = I \frac{d\Phi}{d\Theta} \qquad (17)$$

Las relaciones (16) y (17) son generales, válidas no solamente para el caso de un imán o imanes en rotación en el campo producido por una bobina, como lo hemos considerado hasta ahora, sino también para una bobina recorrida por la corriente I, en rotación en un campo producido sea por un imán, sea por otro circuito recorrido por una corriente I'; Φ designará entonces el flujo a través de la bobina móvil y R la resistencia total de su circuito supuesto sin self-inducción.

La corriente i se superpone a la corriente I enviada por la fuente exterior; la ecuación del movimiento se escribe pues de manera general

$$K \frac{d^2\Theta}{dt^2} + A_0 \frac{d\Theta}{dt} + C_d = (I + i) \frac{d\Phi}{d\Theta} \qquad (18)$$

o sea, teniendo en cuenta (16)

$$K \frac{d^2\Theta}{dt^2} + \left\{ A_0 + \frac{1}{R} \left(\frac{d\Phi}{d\Theta} \right)^2 \right\} \frac{d\Theta}{dt} + C_d = I \frac{d\Phi}{d\Theta} \qquad (19)$$

siendo A_0 el coeficiente de amortiguamiento en circuito abierto.

En el caso de los galvanómetros de imán móvil A_0 se debe

generalmente sólo a los frotamientos del aire. Para seguir la discusión del movimiento, consideremos el caso particular del galvanómetro Nobili. La expresión de $\frac{d\Phi}{dt}$ se obtiene inmediatamente comparando (11) con (17):

$$\frac{d\Phi}{d\Theta} = M_1 G_1 \cos\Theta - M_2 G_2 \cos(\Theta + \gamma) \qquad (20)$$

expresión que puede también encontrarse asimilando los imanes a solenoides equivalentes.

Se tiene pues

$$K \frac{d^2\Theta}{dt^2} + \left\{ A_o + \frac{[M_1 G_1 \cos\Theta - M_2 G_2 \cos(\Theta+\gamma)]^2}{R} \right\} \frac{d\Theta}{dt} +$$

$$+ M_r H_t \operatorname{sen}\Theta = I [M_1 G_1 \cos\Theta - M_2 G_2 \cos(\Theta + \gamma)] \qquad (21)$$

Se ve que los resultados de la discusión del movimiento hecha en el capítulo I no se aplican más que si Θ es lo suficientemente pequeño como para que se pueda admitir que G_1 y G_2 son constantes y que $\operatorname{sen}\Theta \cong \Theta$, $\cos\Theta \cong 1$ o aún $\cos(\gamma + \Theta) \cong \cos\gamma$ siendo γ muy próximo a π; además hay que suponer que A_o es una constante, lo que solo es suficientemente cierto si Θ y $\frac{d\Theta}{dt}$ permanecen entre ciertos límites.

Admitiendo estas aproximaciones (21) se escribe

$$K \frac{d^2\Theta}{dt^2} + \left\{ A_o + \frac{(M_1 G_1 - M_2 G_2 \cos\gamma)^2}{R} \right\} \frac{d\Theta}{dt} + M_r H_t \Theta =$$

$$= I (M_1 G_1 - M_2 G_2 \cos\gamma) \qquad (22)$$

La acción de las corrientes inducidas se traduce por un aumento del amortiguamiento; se puede decir que todo pasa como si las corrientes inducidas no existiesen, pero, al cerrar el circuito, el coeficiente de amortiguamiento pasara del valor A_o a $A = A_o + \frac{(M_1 G_1 - M_2 G_2 \cos\gamma)^2}{R}$.

El valor R_c de R para el que se obtiene el amortiguamiento crítico se llama "resistencia crítica", pero salvo excepción (galvanómetro de Nernst **II, 11**), la resistencia del circuito está muy por encima de R_c, o sea, el amortiguamiento electromagnético es insignificante, aún empleando bobinas de pequeña resistencia en un circuito cuya resistencia es también pequeña, para colocarse en

las mejores condiciones de sensibilidad en tensión (véase IV, 9).

El amortiguamiento total del sistema móvil sin artificio especial es casi siempre muy pequeño, y para hacer el retorno al cero más rápido, será necesario aumentar o bien el amortiguamiento por el aire agregando al órgano móvil (fig. 6 y 9) una paleta de forma conveniente, lo que aumenta sin embargo el momento de inercia, o bien el amortiguamiento electromagnético, haciendo oscilar el imán cerca de una masa de cobre (fig. 10).

El período ideal del movimiento es

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{K}{M_r \; H_t}} \qquad (23)$$

Se ve inmediatcmente que por el hecho de hacer M_r muy pequeño con el fin de aumentar la sensibilidad, se aumenta considerablemente el período, lo que puede hacer las medidas impracticables. Aparece así una segunda ventaja en adoptar un par director adicional constante regulable: al reducir la sensibilidad al valor estrictamente necesario aumentando el par director, no solamente se aumenta la estabilidad del cero sino que se reduce el período.

8. Galvanómetro de Lord Kelvin.— *Lord Kelvin* (*Sir William Thomson*) estudió el problema de la realización de un galvanómetro de imán sensible a la vez que de indicaciones lo bastante rápidas como para ser apto a las aplicaciones industriales, en particular a la recepción de las señales transmitidas por los cables submarinos. Fué necesario a este efecto por una parte disminuir el período, reduciendo en lo pcsible el momento de inercia a igualdad de par motor, y por otra parte realizar un amortiguamiento próximo al crítico. El primer punto fué resuelto por el empleo de varios imanes paralelos muy cortos en lugar de un imán más largo único; a causa del campo desmagnetizante, el momento magnético que se puede realizar con imanes muy cortos es bastante más pequeño que con el imán largo, pero la disminución del par motor debida a esta causa se encuentra compensada por el hecho de que se puede disminuir el radio interior de las bobinas que crearán por consiguiente un campo más fuerte a igualdad de resistencia. El segundo punto se resolvió aumentando considerablemente el amortiguamiento por el aire muniendo al sistema móvil de

una paleta muy ligera de mica o de aluminio, dispuesta p. ej. normalmente a los imanes inferiores como está representado en la fig. 9.

Las variantes en la construcción del galvanómetro de *Lord Kelvin* son numerosas; el aparato más empleado es del tipo de 4 bobinas; cada bobina rectangular, que obra sobre un grupo de imanes del sistema astático, ha sido dividida en dos partes, con el fin de permitir una colocación fácil del sistema móvil; así como el cambio rápido de las bobinas (fig. 9). En algunos aparatos el espejo está pegado a los imanes superiores; la abertura de las bobinas es entonces troncocónica y no cilíndrica con el fin de no interceptar los rayos luminosos. Las corrientes en las bobinas superiores e inferiores son evidentemente de sentido contrario para que sus acciones sobre el sistema móvil se sumen.

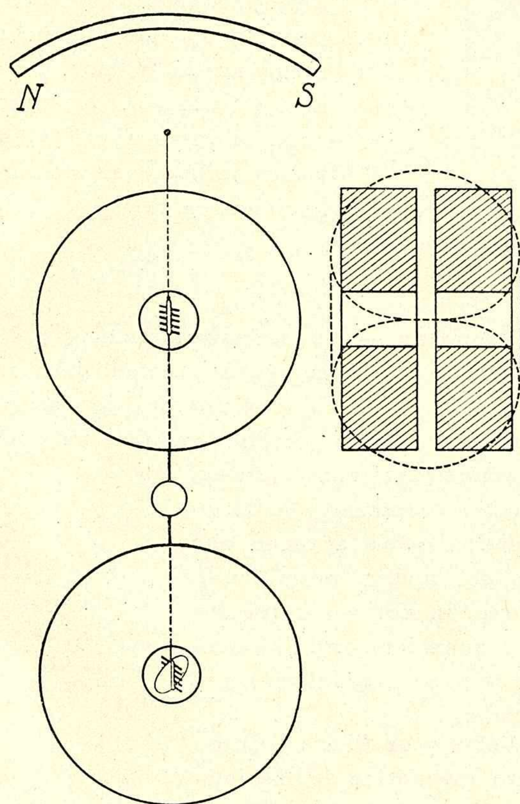


Fig. 9

Ya hemos observado que no hay interés en hacer la sensibilidad de un aparato dado mayor que la estrictamente necesaria para no aumentar inutilmente la duración de las medidas y la inestabilidad del cero. Con el fin de poder regular la sensibilidad *Lord Kelvin* colocó encima de las bobinas un imán permanente corrector cuya orientación y distancia al sistema se pueden hacer variar. El campo director resultante del creado por el imán y del campo terrestre tiene valores diferentes al nivel de cada uno de los grupos que forman el sistema astático, porque éstos se encuentran a distancias diferentes del

imán corrector. No obstante, se puede siempre reemplazar la acción resultante directriz sobre el sistema móvil por la de un campo ficticio, H_d, variable a voluntad con la posición del imán corrector y que obra sobre M_r; las ecuaciones de equilibrio y del movimiento, si admitimos paralelos los ejes de las bobinas superiores e inferiores, son aún evidentemente las que hemos establecido en el caso del galvanómetro Nobili, pero en las que se habrá reemplazado H_t por H_d y hecho $G_1 \cong G_2$. En particular la expresión (14) de la sensibilidad se escribe, haciendo $M_1 = M_2$

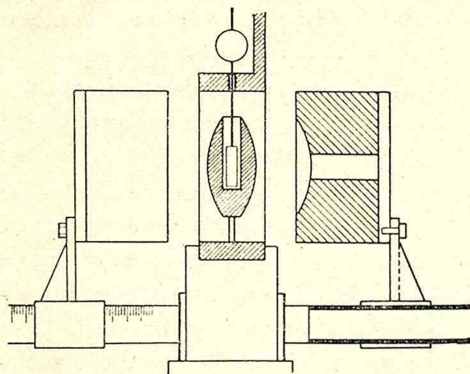


Fig. 10

$$\frac{\Theta}{I} = \frac{2\, M_1\, G_1}{M_r\, H_d} \qquad (24)$$

9. Galvanómetro de Wiedemann. — En este galvanómetro (fig. 10) el imán consiste en un disco, anillo o campana imantado horizontalmente, suspendido en el plano vertical por un hilo de capullo de seda. El imán oscila en una cavidad hecha en una masa de cobre; se obtiene así un amortiguamiento satisfactorio. Las bobinas se pueden desplazar a lo largo de un eje horizontal graduado, normal al plano que contiene el eje magnético del imán, permitiendo así, conjuntamente con un imán corrector, regular a sensibilidad. Es evidente que a igualdad de sensibilidad la estabilidad del cero es muy inferior que en el aparato de *Lord Kelvin.*

10. Galvanómetros de Weiss y de Broca.— Como ya lo notamos, el momento magnético de los imanes empleados en el galvanómetro de *Lord Kelvin* es pequeño. *Weiss* tuvo la idea de formar el sistema astático por dos imanes verticales largos y delgados, paralelos entre sí y al eje de rotación, que es al mismo tiempo su eje de simetría. Los imanes, con los polos de nombres contrarios enfrentados, están colocados muy próximos entre sí. Se disponen dos pares de bobinas, actuando cada una sobre las extremidades de los imanes como in-

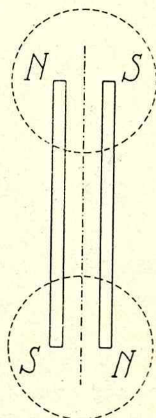


Fig. 11

dica la fig. 11; todo pasa entonces como si las bobinas obrasen sobre dos imanes muy cortos horizontales (*N S* arriba, *S N* abajo, fig. 11) que forman evidentemente un sistema astático. El momento magnético de los imanes cortos ficticios es muy grande, porque a causa de la gran longitud de los imanes reales empleados, el campo desmagnetizante es pequeño y las masas magnéticas en los extremos pueden ser importantes. Es de notar que cuando se obtiene el paralelismo absoluto de los imanes reales y del eje, el sistema es astático aún si los momentos magnéticos de los imanes no son iguales. Se concibe sin embargo que un paralelismo absoluto no es posible de obtener; se remedió esto en el galvanómetro de *Broca*.

Broca modificó un poco la disposición anterior, utilizando varillas imantadas con un polo consecuente en el centro y dos polos del mismo nombre en los extremos (fig. 12) Se puede entonces hacer astática separadamente cada una de las varillas, disponiendo convenientemente el polo consecuente; el paralelismo absoluto de las varillas no es ya necesario en estas condiciones Se utiliza un solo par de bobinas que obran principalmente sobre el imán corto ficticio formado por los polos consecuentes colocados uno frente a otro y dispuestos en el centro de las bobinas.

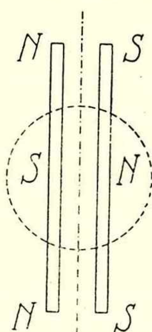


Fig 12

Los sistemas descritos, que permiten obtener una sensibilidad muy grande, presentan sin embargo la desventaja de poseer a igualdad de momento magnético, un momento de inercia más grande (y por consiguiente un período más largo) que el galvanómetro de *Lord Kelvin*.

11. Galvanómetro de Nernst.—El sistema astático y la bobina están dispuestos como en el galvanómetro *Nobili*; la originalidad del galvanómetro consiste en que se agrega al sistema astático principal M_1, M_2 un grupo de dos imanes auxiliares m_1 y m_2 que corrigen la imperfección del paralelismo, así como el defecto de igualdad de los momentos magnéticos de los imanes principales (fig. 13), siendo así el conjunto tan perfectamente astático como es posible. El

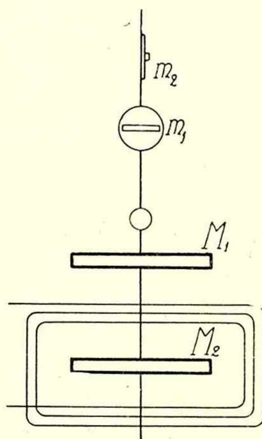


Fig. 13

campo director está producido por un imán permanente ; la estabilidad del cero es buena; sin embargo, a igualdad del período, la sensibilidad del aparato no es muy grande. El amortiguamiento por corrientes inducidas en la bobina es relativamente importante debido al valor elevado de $M_1 G_1$.

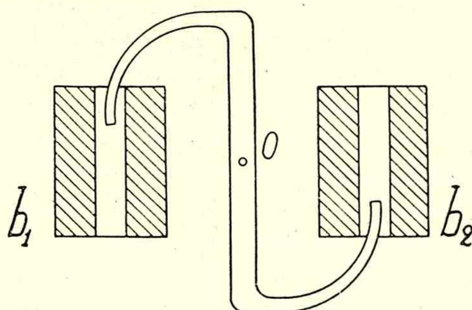


Fig. 14

El imán m_1 está dispuesto en el plano que contiene los ejes de los imanes M_1 y M_2 ; está soportado por un pequeño disco vertical de aluminio. El imán m_2, llevado igualmente por un pequeño disco de aluminio, está dispuesto en un plano vertical normal al que contiene m_1. Los dos imanes auxiliares se regulan haciendo girar los discos que los llevan en sus planos respectivos, de manera que su momento resultante sea practicamente igual y opuesto a M_r, momento resultante de M_1 y M_2.

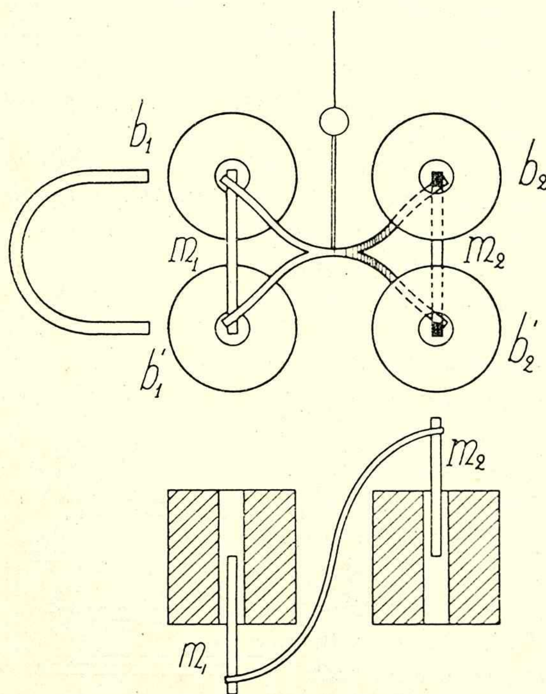


Fig. 15

12. Galvanómetros de Rosenthal y de Gray. — *Rosenthal* dispuso horizontalmente un imán en Z (fig. 14), cuyos polos son aspirados por dos bobinas b_1 y b_2. El sistema gira alrededor del eje *O*. La acción específica de las bobinas es particularmente fuerte, dada su disposición; además, la longitud relativamente considerable del imán permite dar a éste un momento magnético importante.

Un galvanómetro astático cuyo principio es análogo fué construído, en la misma época e independientemente, por *A.* y *T. Gray* (fig. 15). Dos imanes en forma de herradura, m_1 y m_2, están reunidos entre sí por una varilla curva de aluminio, y dispuestos en planos verticales paralelos de manera que sus polos, cuya línea es vertical, sean aspirados por las bobinas b_1 y b'_1 para uno y b_2 y b'_2 para el otro, produciendo así una rotación del conjunto. El campo director está regulado por un imán corrector, como de costumbre.

A. Gray indica que el aparato es susceptible de una sensibilidad práctica de 1.10^{-11} mA/mm ; sin embargo su período es largo.

BIBLIOGRAFÍA

Ver también la bibliografía del capítulo IV.

1. **W. E. Ayrton, T. Mather, W. E. Sumpner** — *Phil. Mag.* t. 30, p. 59, 1890.
2. **H. du Bois** — *Wied. Ann.* t. 63, p. 344, 1897; t. 65, p. 1, 1898.
3. **H. du Bois y H. Rubens** — *Zs. f. Instrkde.* t. 20, p. 65, 1900.
4. **A. Broca** — *C. R. Acad. Sc.* t. 123, p. 101, 1896, o *Journ. de Phys.* t. 6 p. 67, 1897.
5. **A. Charpentier** — *Ecl. él.* t. 40, p. 380, 1904.
6. **W. Coblentz** — *B. of St. Sc. Pap.* N.° 282, 1916.
7. **H. A. Daynes** — *Journ. Sc. Instr.* p. 7, 1925.
8. **T. Gray** — *Proc. Roy. Soc.* t. 36, p. 287, 1884.
9. **A. Gray** — "Absolute Measurements in electricity and magnetism" — Macmillan and Co. Ltd., London, 1921.
10. **A. V. Hill** — *Journ. Sc. Instr.* t. 3, p. 331, 1926.
11. **J. C. Maxwell** — "Traité d'électricité et magnétisme" — Gauthier-Villars, Paris, 1885.
12. **M. Melloni** — *Arch. de l'él.* t. 1, p. 667, 1841.
13. **W. Nernst y W Jaeger** — *Zs. f. Instr.* t. 44, p. 80, 1924; t. 45, p. 139, 1925.
14. **B. F. Nichols y S. R Williams** — *Phys. Rev.* t. 27, p. 250, 1908.
15. **L. Nobili** — *Pogg. Ann.* t. 8, p. 338, 1826.
16. **F. Paschen** — *Phys. Zs.* t. 14, p. 521, 1913.
17. **C. Pouillet** — *C. R. Acad. Sc.* t. 4, p. 267, 1837.
18. **I. Rosenthal** — *Wied. Ann.* t. 23, p. 667, 1884.
19. **R. Schmidt** — *Handbuch der Physik,* t. 16, p. 254 — Springer, Berlin, 1927.
20. **Schweigger** — *Allgem. Litteraturzeitung* N.° 296, p. 722, 1820.
21. **P. Weiss** — *C. R. Acad. Sc.* t. 120, p. 728, 1895.
22. **E. Wiedemann** — *Pogg. Ann.* t. 89, p. 504, 1853.
23. **A. P. Wills** — *Phys. Rev.* t. 9, p. 193, 1899; t. 24, p. 243, 1907.

CAPITULO III.

Galvanómetros de cuadro móvil para corriente continua.

1. Principio de los galvanómetros de cuadro móvil. — Se puede considerar el cuadro de suspensión bifilar de *Weber* como el aparato del que derivan los galvanómetros de cuadro móvil. Su principio es el siguiente: sea H_t la componente horizontal del campo terrestre, μ_o la permeabilidad del aire, S la superficie total del cuadro e I la corriente que lo recorre. El cuadro, dispuesto primitivamente de manera que su plano coincida con el del meridiano terrestre, va a girar un ángulo Θ hasta que el par director $C_d = C' \, sen \, \Theta$ equilibre al electromagnético $\mu_o \, H_t \, SI \cos \Theta$, de manera que

$$tg \, \Theta = \frac{\mu_o \, H_t \, S}{C'} \, I$$

Lord Kelvin, en su siphon - recorder para la recepción de las señales de la telegrafía submarina, empleó una bobina con núcleo coaxial de hierro, suspendida en el campo de un electroimán.

La forma ya clásica del galvanómetro de cuadro móvil, a saber, una bobina con núcleo coaxial de hierro, suspendida en el entrehierro de un imán permanente, se debe a *Deprez y d'Arsonval,* lo que justifica que el galvanómetro de cuadro móvil sea llamado a veces galvanómetro Deprez - d'Arsonval, o aún de d'Arsonval.

Se han construído sobre este principio galvanómetros cuya sensibilidad práctica en intensidad varía entre límites muy extensos, 10^{-4} a 10^{-11} mA/mm aproximadamente (véase el capítulo X).

Los aparatos más sensibles ($\sim 10^{-7}$ — $\sim 10^{-11}$ mA/mm) son siempre de espejo, o sea de índice óptico; los menos sensibles ($\sim 10^{-4}$ — $\sim 10^{-7}$ mA/mm) son de aguja, o sea de índice mecánico. En estos últimos el cuadro está soportado a veces por pivotes y el par director está ejercido por resortes en espiral; en muchos aparatos menos sensibles, y siempre en los más sensibles, el cuadro está suspendido. La suspensión es unifilar, de manera que el par director es proporcional al ángulo de desviación : $C_d = C\,\Theta$, en vez de $C_d = C'\,sen\,\Theta$ para la suspensión bifilar.

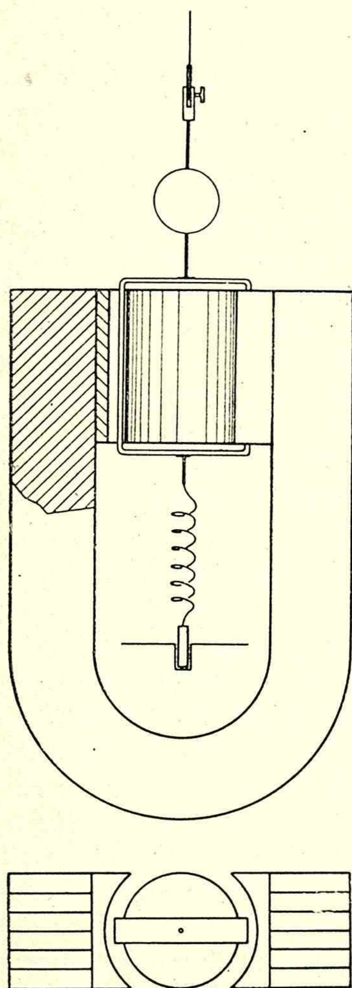


Fig. 1

Veamos ahora la expresión del par motor; supongamos primero que el campo H, en el que está suspendido el cuadro, sea uniforme; el flujo a través del cuadro, cuando su plano forma el ángulo Θ con la dirección del campo, es $\Phi = \Phi_o\,sen\,\Theta$, siendo $\Phi_o = \mu_o\,H\,S$.

Se dispone el cuadro de manera que su plano sea paralelo a las líneas de fuerza ($\Theta = 0$) cuando no está recorrido por ninguna corriente. Enviemos una corriente I al cuadro, que se desviará un ángulo Θ, siendo el par electromagnético

$$C_m = I\,\frac{d\Phi}{d\Theta} = \Phi_o\,I\,cos\,\Theta$$

El equilibrio tiene lugar cuando el par director $C_d = C\,\Theta$ equilibre al electromagnetico, o sea para

$$I = \frac{C}{\Phi_o}\,\frac{\Theta}{cos\,\Theta} \qquad (1)$$

o aún, si el ángulo Θ es lo suficientemente pequeño como para confundir $cos\,\Theta$ con la unidad

$$I = \frac{C}{\Phi_o} \Theta \qquad (2)$$

Supongamos ahora que se haya dado forma cilíndrica a las piezas polares del imán (fig. 1) y que se haya dispuesto entre estas piezas un núcleo coaxial de hierro, constituído por un cilindro o tubo cilíndrico. No solamente se aumenta así el valor del campo, sino que se obtiene, cuando el entrehierro es suficientemente pequeño (1 a 2 mm. generalmente), un campo radial de intensidad constante en un ángulo bastante grande, próximo a 45°, de una y otra parte del eje de los polos. Sean a y b respectivamente la longitud y el ancho de una espira, l la longitud de la espira en el campo (practicamente se toma $l = a$) y n el número de espiras del cuadro. El flujo cortado por el cuadro en una rotación de $d\Theta$ en la región del campo de intensidad constante es

$$d\Phi = \mu_o H l b n . d\Theta = \Phi_o d\Theta$$

haciendo

$$\Phi_o = \mu_o H l b n \cong \mu_o H a b n$$

El par electromagnético es

$$C_m = I \frac{d\Phi}{d\Theta} = \Phi_o I$$

y la posición de equilibrio está definida por la ecuación

$$\Phi_o I = C \Theta \qquad \text{o sea} \qquad I = \frac{C}{\Phi_o} \Theta \qquad (2)$$

válida cualquiera que sea Θ, siempre que se permanezca en la región en que la intensidad del campo es constante. Este resultado es particularmente interesante para los aparatos industriales de desviación, en los que Θ es grande: la constancia de la relación $\frac{\Theta}{I}$ se traduce por la obtención de una escala uniforme. Se ve inmediatamente que la proporcionalidad de las desviaciones a las corrientes es mucho mejor en los galvanómetros de cuadro que en los de imán móvil (véase **II, 6**).

Otra ventaja del campo radial consiste en hacer la relación (2) válida cualquiera que sea la posición inicial del cuadro dentro del campo de intensidad constante, mientras que con el campo uniforme, aún para desviaciones lo suficientemente pequeñas como

para que se pueda hacer $\cos \Theta = 1$, no hay proporcionalidad entre Θ e I si el cuadro en reposo está desviado un ángulo β apreciable de la línea de los polos. Se tiene entonces, al enviar una corriente I

$$C_m = I \, \Phi_o \cos(\beta \pm \Theta)$$

y la posición de equilibrio está definida por

$$I \, \Phi_o \cos(\beta \pm \Theta) = C \, \Theta$$

de donde, haciendo $\cos \Theta = 1$ y $\operatorname{sen} \Theta = \Theta$

$$\Theta = \frac{I \, \Phi_o \cos \beta}{C \pm I \, \Phi_o \operatorname{sen} \beta} \qquad (3)$$

Finalmente el campo radial presenta la ventaja de liberar al aparato de un par director parásito debido a la acción del campo uniforme sobre las impurezas ferromagnéticas del cuadro, ya sea contenidas en el cobre (se empleará pues solamente el cobre electrolítico) o en el aislante, ya sea imprimidas en el cuadro durante su fabricación. Dicho par, según *White*, es proporcional a la masa del cuadro y a la raíz cuadrada de la intensidad del campo; su valor depende también de la desviación. La existencia de este par reduce particularmente el interés del aparato. En efecto, después de una desviación, el cero no es ya el mismo, pudiéndose notar el fenómeno de viscosidad; además, una modificación del campo, p. ej. con ayuda de un shunt magnético, desplaza el cero; en razón del fenómeno de histéresis magnética, la desviación para una corriente dada depende del valor anterior de la corriente; el decremento logarítmico aumenta con el campo (*Zeleny*). En un campo radial perfecto el par parásito desaparece evidentemente porque las líneas de fuerza pasan por el eje de rotación, y aunque tal campo sea irrealizable, los progresos de la construcción han sido suficientes para que el par parásito no tenga generalmente importancia práctica en los aparatos usuales. Cabe notar que el par ejercido sobre las impurezas magnéticas ha sido aprovechado por la casa Leeds-Northrup para construir un galvanómetro de muy alta sensibilidad en intensidad; gracias a una distribución conveniente de las líneas de fuerza del campo este par disminuye y no aumenta el par director de torsión.

2. Amortiguamiento. Ecuación de movimiento. — Sea R la re-

sistencia del cuadro, cuyo coeficiente de self-inducción despreciamos; la relación (19) del capítulo II, 7

$$K \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \left\{ A_o + \frac{1}{R} \left(\frac{d\Phi}{d\Theta} \right)^2 \right\} \frac{d\Theta}{dt} + C_d = I \frac{d\Phi}{d\Theta}$$

se aplica aquí ; si suponemos el campo radial, o sea $\frac{d\Phi}{d\Theta} = \Phi_o$ tendremos

$$K \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \left(A_o + \frac{\Phi_o^{\,2}}{R} \right) \frac{d\Theta}{dt} + C\Theta = \Phi_o I \qquad (4)$$

La acción de las corrientes inducidas se traduce por un simple aumento de A_o, coeficiente de amortiguamiento en circuito abierto; A_o se debe a los frotamientos del aire y a la histéresis elástica, de la que el hilo no puede estar completamente exento, pero cuya importancia es generalmente pequeña. El amortiguamiento por corrientes inducidas, casi siempre despreciable en los galvanómetros de imán móvil, es en mucho el más importante en los galvanómetros de cuadro móvil.

Los resultados del estudio hecho en el capítulo I se aplican aquí con una aproximación muy superior a la obtenida en los galvanómetros de imán (II, 7).

Salvo en casos particulares, A_o es pequeño y el movimiento del cuadro en circuito abierto ($R = \infty$) es periódico. Obrando sobre el valor de R se obra sobre el amortiguamiento; la resistencia crítica R_c está dada por

$$A_o + \frac{\Phi_o^{\,2}}{R_c} = 2\sqrt{KC} \qquad (5)$$

o sea

$$\alpha_o + \frac{\Phi_o^{\,2}}{2R_c\sqrt{KC}} = \alpha_c = 1 \qquad (6)$$

Si A_o es muy pequeño, las lecturas en un circuito de resistencia elevada frente a la crítica son largas; se puede remediar esto agregando al cuadro una o más espiras en corto-circuito (ver también III, 9).

3. Imanes. — Se ve que la sensibilidad en intensidad

$$\frac{\Theta}{I} = \frac{\Phi_o}{C} = \frac{BS}{C} = \mu_o \frac{HS}{C}$$

será, a igualdad de otros factores, tanto mayor cuanto mayor sea

el campo magnético en el que se mueve el cuadro. Además, con un campo H intenso no es de temer la acción perturbadora de los campos magnéticos exteriores, tales como el terrestre o el debido a un conductor recorrido por una corriente importante y colocado en la vecindad del galvanómetro.

Además de presentar un fuerte magnetismo remanente, el imán del galvanómetro debe poseer una constancia de características en el tiempo tan perfecta como sea posible; su campo coercitivo debe pues ser importante, sin lo cual se arriesga que los campos parásitos disminuyan el magnetismo remanente de manera sensible. La constancia de las características magnéticas en el tiempo es afectada por variaciones de temperatura y factores tales como choques, vibraciones, campos magnéticos parásitos, etc., pero gracias a los progresos de la construcción se saben obtener hoy en día imanes notablemente constantes, lo que permite espaciar mucho las calibraciones de los aparatos. Los imanes para galvanómetros se construyen en acero especial, al tungsteno, o, más modernos, al cobalto, al nickel y aluminio y otros, sometidos a tratamientos térmicos convenientes de temple y envejecimiento.

El imán es generalmente en forma de U, con piezas polares, La determinación de sus dimensiones debe ser objeto de un estudio particular; limitemosnos a demostrar aquí que las dimensiones a elegir dependen esencialmente de las propiedades magnéticas del acero empleado. Sean L, S y l, s las longitudes y secciones del imán y del entrehierro respectivamente; supongamos despreciables las fugas y la reluctancia de las piezas polares de hierro dulce, se tiene entonces, designando por B y H_i la inducción y el campo en el imán, y por H el campo en el entrehierro

$$BS = \mu_o Hs \tag{7}$$

y

$$H_i L + Hl = 0 \tag{8}$$

de donde

$$B H_i LS = - \mu_o H^2 ls \tag{9}$$

Vemos que a H, s y l dados, el volumen del imán será mínimo cuando el producto $B H_i$ sea máximo; ahora bien, $B = f(H_i)$ y los valores de B y H_i para los que $B H_i$ es máximo están perfectamente definidos para cada acero, y, fijadas s, l y H, lo están también L y S, pudiendo tener valores muy diferentes de una aleación a otra (*van Urk*). En realidad lo que precede no constituye más que una primera aproximación; por una parte es nece-

sario tener en cuenta las fugas, y por otra el hecho de que en razón de la presencia de las piezas polares y del núcleo coaxial del cuadro, la característica $B = f(H_i)$ no es más la parte del ciclo normal de histéresis relativa al segundo cuadrante, sino la curva media de un ciclo parcial en el mismo cuadrante; se consultarán utilmente los trabajos de *Picou* sobre el particular.

Hace algún tiempo, los imanes estaban constituídos por la reunión de varios imanes delgados de forma idéntica, con el fin de formar uno de espesor mayor (fig. 1); sin embargo, los progresos de la construcción han sido tales que, salvo para imanes de muy grandes dimensiones, tal disposición no presenta ventajas desde el punto de vista magnético (*Michel* y *Veyret*).

La inducción creada por los imanes permanentes en los galvanómetros de cuadro está generalmente comprendida entre 500 y 1500 gauss, raramente es mayor, aunque se pueden obtener valores muy superiores con imanes permanentes y valores mucho más elevados todavía, que pasan de 20000 gauss, utilizando electroimanes. El empleo de estos últimos crea sin embargo inconvenientes particulares, como ser la necesidad de una fuente especial de alimentación, las perturbaciones que puede causar el calor desprendido en las bobinas, las variaciones eventuales de la corriente de excitación, etc. En cambio los electroimanes tienen la ventaja de permitir la fácil regulación del campo entre extensos límites.

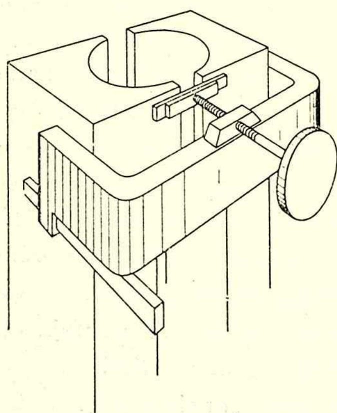
No se emplean campos muy fuertes por consideraciones sobre la resistencia crítica, que veremos más adelante, y porque la experiencia mostró que el cero del aparato es entonces menos estable, tanto menos cuanto mayor es el número de espiras del cuadro, observándose además un fenómeno marcado de viscosidad. La explicación de estas manifestaciones reside en la acción del par parásito, mencionado más arriba (III, 1), debido a las impurezas ferromagnéticas del cuadro, pues por más que se cuide la construcción no se podrá obtener que todas las líneas de fuerza pasen por el eje de rotación. El empleo de electroimanes en los aparatos basados en la acción del campo magnético sobre un circuito eléctrico queda así limitado a los casos en que el circuito se reduce a uno o dos hilos como p. ej. en el galvanómetro de cuerda.

La inducción varía con la temperatura, tanto más cuanto mayor es el coeficiente de desimantación; a las temperaturas de

laboratorio se puede admitir como término medio una disminución relativa de 2. 10^{-4} para un aumento de temperatura de 1° *C*.

Los imanes pueden estar dispuestos horizontalmente (fig. 7) o verticalmente (fig. 1, 9); a menudo están provistos de uu shunt magnético que permite regular la inducción en el entrehierro entre ciertos límites. Tal shunt se construye facilmente; la fig. 2 representa una de las realizaciones posibles, debida a la casa Siemens-Halske; véase también el galvanómetro de resonancia de Drysdale-Tinsley en el capítulo VII.

4. Par director. Suspensión. — Hay que distinguir aquí entre el cuadro suspendido y el soportado por pivotes; en el primer caso la suspensión puede ser libre o tensa.


Fig. 2

a) *suspensión libre*. Es la empleada generalmente en los galvanómetro sensibles, a menos de casos particulares como ser galvanómetros para navíos. La suspensión libre requiere una nivelación cuidadosa, pero presenta sobre la tensa ciertas ventajas. En primer lugar la sección del hilo de suspensión puede ser más pequeña que en los aparatos con suspensión tensa, lo que, como veremos luego, se traduce por la posibilidad de un aumento de sensibilidad. Además, como es improbable que el centro de gravedad se encuentre exactamente sobre el eje de los hilos de suspensión si éstos son tensos, basta que los hilos no sean rigurosamente verticales para que el peso del cuadro ocasione un par parásito de rotación, variable con la nivelación.

El hilo de suspensión, o superior, puede existir sclo; la corriente llega entonces al cuadro por dos hilos laterales muy finos, flojos, de plata u oro recocidos, dispuestos en forma de no producir par de torsión apreciable. Frecuentemente sin embargo se agrega un hilo inferior de suspensión que se enrolla en forma de resorte flojo en hélice, cuyo eje coincide con la dirección del hilo superior (fig. 1). La corriente llega entonces por los hilos superior e inferior, de los que solo el primero ejerce acción directora; el par debido al segundo es despreciable.

Los hilos que traen la corriente deben estar soldados al cuadro por una parte y al soporte por otra para evitar malos contactos. El empleo de conductores flojos permite la solución particularmente fácil del problema del bloqueo del órgano móvil, tan útil en el transporte; basta entonces levantar el cuadro apretándolo contra el núcleo de hierro.

La suspensión puede ser de bronce fosforoso, plata, wollaston, cobre, etc; el metal empleado no debe oxidarse ni ser magnético, y debe estar tan exento de torsión residual como sea posible, sin lo cual después de haber sido apartado de su posición de equilibrio no vuelve a ella exactamente, presentando un fenómeno de viscosidad. Este efecto es tanto más notable cuanto mayores son el peso del cuadro, la amplitud y la duración de la desviación, sumándose al efecto análogo, y frecuentemente mayor, debido a las impurezas ferromagnéticas del cuadro. Para eliminar la influencia de este fenómeno en una medida dada (*Zeleny*), se hace experimentar al galvanómetro, que debe ser lo suficientemente amortiguado como para que no haya oscilaciones propias importantes, una desviación preliminar superior a todas las que deben tener lugar más adelante en el curso de la medida, que tendrán que ser siempre del sentido de la desviación previa. Si el hilo de suspensión conduce la corriente, el pasaje de ésta no debe alterar sus propiedades elásticas, ni aún en el caso de una sobreintensidad de pequeña duración (caso de medidas balísticas).

El módulo de elasticidad a la torsión γ del hilo de suspensión disminuye cuando la temperatura aumenta, en proporciones variables con la naturaleza del metal; para el bronce fosforoso la disminución relativa es de alrededor de $4 . 10^{-4}$ por $1°$ C. Cuando la temperatura varía, la sensibilidad en intensidad se encuentra así afectada por la variación de C por una parte y de H por otra; los dos efectos se compensan parcialmente. El coeficiente de temperatura resultante es esencialmente función del aparato. *Zeleny* y *Hovda* indican un coeficiente nulo para un aparato, $+ 2 . 10^{-4}$ para otro.

La constante de torsión es:

1) para un hilo circular de diámetro d y longitud l

$$C = \gamma \frac{\pi d^4}{8 l} \qquad (10)$$

2) para un hilo de sección rectangular, de lados p y q

$$C = \gamma \frac{12\, k\, p^3\, q^3}{l\,(p^2 + q^2)} \tag{11}$$

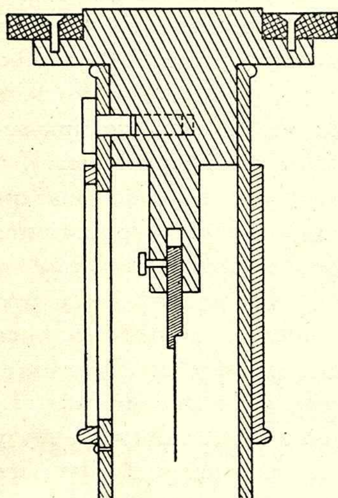
El coeficiente k es función de la relación $\frac{p}{q}$; se podrá tomar $k = 0{,}0234$ si $p = q$ y $k = 0{,}0260$ si $p = 8\, q$; para el bronce fosforoso $\gamma = \sim 4.\ 10^{-12}$ $u.$ $G = \sim 4.\ 10^{-11}$ $CGS.$

La suspensión bifilar no se emplea casi nunca; indiquemos sin embargo, para ser más completos, la expresión aproximada del par, válida cuando los hilos son suficientemente largos

$$C_d = \frac{P\, m n}{4\, l}\ sen\ \Theta \tag{12}$$

donde m y n son las distancias entre los puntos de unión de los hilos de suspensión en la parte superior y en el cuadro, y P el peso del sistema móvil.

La construcción del aparato debe ser tal que se pueda regular el cero y que el cambio del hilo de suspensión sea lo más fácil posible, al menos en los aparatos usuales de laboratorio. En la fig. 3, que da el detalle de un posible dispositivo de suspensión, se ve que para desplazar el cero basta hacer girar la parte superior del sistema. El hilo de suspensión está soldado a una varilla sujeta con un tornillo dentro de la pieza móvil; un dispositivo idéntico está previsto en la extremidad inferior del hilo (véase fig. 1), en su unión con el cuadro, de modo que el cambio del hilo se efectúa facilmente.


Fig. 3

¿Qué longitud y sección del hilo adoptar? Razones de comodidad fijan generalmente la longitud del hilo entre ~ 5 y ~ 12 cm., eligiéndose la sección de acuerdo con la sensibilidad deseada. La expresión de la sensibilidad en intensidad

$$S_i = \frac{\Theta}{I} = \frac{\Phi_0}{C}$$

parece demostrar que bastaría aumentar Φ_0 y disminuir suficientemente C para obtener una sensibilidad tan grande como sea posible, o sea para alcanzar el límite natural de la sensibilidad (véase IV, 15); sin duda las posibilidades de empleo de tal aparato serían restringidas en razón del valor muy elevado de su resistencia crítica. En realidad no es generalmente posible llegar tan lejos, por lo menos en el estado actual de la construcción. En efecto, para aumentar Φ_0 hay que aumentar el número de espiras del cuadro, lo que hace a éste más pesado, y la inducción B; ahora bien, como lo notamos en III, 3, no hay interés en aumentar demasiado B cuando la masa del cuadro es importante. Además, para disminuir C es preciso disminuir la sección del hilo de suspensión, lo que está en contradicción con el aumento de peso del cuadro. Una simple comparación de las fórmulas (10) y (11) muestra entonces la ventaja de las cintas sobre los hilos de sección circular: a igualdad de sección la constante de torsión es inferior en las primeras, tanto más cuanto mayor es la relación $\frac{p}{q}$. La disminución de C tiende a aumentar el período ideal $T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{C}}$; para que éste conserve un valor aceptable en los aparatos muy sensibles, es necesario disminuir lo más posible K. Hay que conciliar esta condición con la de aumentar el número de espiras del cuadro; será pues necesario construir el cuadro con un hilo tan fino como sea posible y darle la forma apropiada para que K sea mínimo; la cuestión será estudiada en el próximo parágrafo. El examen del momento de inercia del sistema móvil no siempre debe limitarse al estudio del cuadro; en los galvanómetros en que se busca el máximo de sensibilidad aparente, es necesario considerar también el espejo, problema que será tratado más adelante (IV, 2).

La resistencia interna del aparato será elevada en razón de la pequeña sección del hilo de suspensión por una parte y de la gran longitud del hilo fino empleado para formar el cuadro por otra. La resistencia crítica será muy elevada a causa del gran vavalor de Φ_0 y del pequeño valor de C. Tal galvanómetro no podría emplearse en circuitos de resistencia pequeña; su amortiguamiento sería tan grande que las lecturas resultarían imposibles. Una solución consistiría en agregar en serie una resistencia suficiente como para dar al grado de amortiguamiento un valor aceptable; algunos galvanómetros traen esa resistencia,

cuyo valor es frecuentemente próximo al de la resistencia crítica R_c, colocada en el interior del aparato, que tiene entonces tres bornes (fig. 9) que permiten conectar el circuito exterior ya sea al cuadro solo, ya sea al cuadro con la resistencia en serie.

Sin embargo esa resistencia puede en ciertos casos reducir en tal forma la corriente en el aparato que la medida es imposible. Es necesario entonces modificar el principio de la elección de los elementos del galvanómetro, construyéndolo no ya para obtener una sensibilidad en intensidad lo más elevada posible, sino una sensibilidad en tensión elevada. Trataremos este punto en detalle en el capítulo siguiente (véase **IV, 9, 10**), pero indiquemos desde ya que será entonces preciso obtener la resistencia crítica y la interior del galvanómetro tan pequeñas como sea posible. Para conciliar este resultado con la necesidad de adoptar un hilo de suspensión de sección muy pequeña, *Zernike* empleó un hilo de suspensión de cuarzo muy fino, mucho más resistente mecanicamente que cualquier hilo metálico; la corriente se conduce por bandas de oro recocidas que no aumentan el par de torsión más que en 10 °/ₒ aproximadamente (casa Kipp).

La constante de torsión desciende raramente por debajo de 1.10^{-9} *u. G.* o sea 1.10^{-2} *C. G. S.*

Hasta el momento hemos supuesto el par director debido solamente a la torsión, que es lo que ocurre casi siempre. No obstante, se podrían también utilizar los efectos de la gravedad o de la acción magnética. Así p. ej. *Reinganum* trató de aumentar la sensibilidad agregando al sistema móvil una aguja imantada, colocada en forma de no estar sometida a la acción del imán. Se orientaba el aparato de manera que el par ejercido por el campo terrestre sobre la aguja se restase del par de torsión. El dispositivo no presenta interés, el cero es poco estable. Ya hemos mencionado el procedimiento Leeds-Northrup, en el que el par magnético que viene a disminuir el par de torsión se debe a la acción del campo del imán convenientemente dispersado sobre las impurezas ferromagnéticas del cuadro. En el galvanómetro *Moll* de alta sensibilidad en tensión, fabricado por la casa Kipp, la disminución del par director se obtiene por la acción del campo sobre una sustancia paramagnética colocada en el cuadro móvil. Observemos que se puede también producir un par director electromagnético gracias al dispositivo de los cuadros perpendiculares, del que hablaremos más adelante en **III, 7**.

b) *suspensión tensa*. Se emplean frecuentemente galvanómetros de cuadro suspendido portátiles (fig. 10), de uso simple y cómodo, de índice de longitud constante, ya sea óptico de pequeña longitud, ya sea mecánico (ver también IV, 5). La suspensión, relativamente corta, es tensa; se evita así la necesidad de tener que nivelar el aparato. El par director es mayor que en los galvanómetros de suspensión libre; la sensibilidad es pues inferior, pero muy suficiente para muchas medidas.

c) *pivotes*. En los galvanómetros portátiles de sensibilidad menor, cuyo par director es suficientemente fuerte, se soporta a menudo el cuadro por medio de pivotes. Los resortes en espiral que producen el par sirven al mismo tiempo de conductores de llegada de la corriente. Estos aparatos, cuyo cuadro contiene gran número de espiras, son particularmente sensibles a la acción de la temperatura, porque generalmente no se preve ningún dispositivo de compensación, como ocurre en los aparatos industriales de cuadro de precisión, graduados directamente. A causa de los frotamientos, del desgaste de las puntas y del error por inclinación del eje debido al juego que hay que dejar inevitablemente, la exactitud de estos aparatos es inferior a la de los que tienen el cuadro suspendido, pero es suficiente en muchos casos. Estos galvanómetros sirven generalmente de aparatos de cero.

El período de los aparatos portátiles de cuadro suspendido o soportado por pivotes es generalmente corto, con el fin de permitir medidas rápidas.

5. **Cuadro móvil. La mejor forma a adoptar.** — *Mather* buscó la forma que habría que dar al cuadro para que éste presente, a igualdad de par motor, $\Phi_0 I$, el mínimo de momento de inercia, y por lo tanto, período y duración de observación lo menores posible a igualdad de sensibilidad en intensidad y de amortiguamiento. Sea B la inducción del campo magnético, supuesto uniforme; designemos por A la traza de un elemento de conductor de longitud l, dispuesto en el campo normalmente al plano de la figura y recorrido por una corriente I; sea 0 la traza del eje de rotación, paralelo al elemento l; pongamos $\rho = 0\,A$ y llamemos α al ángulo hecho por 0 A con el vector inducción (fig 4). La fuerza que se ejerce sobre el conductor, normal a éste y al campo, es $f = B\,l\,I$; el par de rotación que produce es $C_m = f\,\rho\,cos\,\alpha$. El momento de inercia del conductor respecto al eje de rotación es $K = m\,l\,\rho^2$, siendo m el

producto de la sección por la densidad del hilo. El par unitario dividido por el momento de inercia es

$$\frac{\Phi_0 I}{K} = \frac{B l I \varrho \cos \alpha}{m l \varrho^2} = \frac{BI}{m} \frac{\cos \alpha}{\varrho}$$

La curva $\frac{\cos \alpha}{\varrho} = Cte$, representa dos circunferencias tangentes en 0 que tienen la línea de los centros en la dirección de B. Es en efecto evidente que el razonamiento hecho para el conductor A se aplica al conductor A', simétrico del anterior con relación al eje 0 de rotación y que sirve de conductor de retorno. El cálculo no tiene en cuenta la parte aproximadamente horizontal de la espira, que une los dos conductores, y cuya influencia es pequeña si la longitud del cuadro es grande respecto a su ancho. Las dos circunferencias $\frac{\cos \alpha}{\varrho} = Cte$ definen pues la mejor sección a dar al cuadro para obtener el mínimo de momento de inercia a igualdad de acción: en efecto, si un volumen igual de conductores está contenido en el interior de un contorno diferente de $\frac{\cos \alpha}{\varrho} = Cte$, todos los conductores que se encuentran en el exterior de las circunferencias tienen una acción específica inferior a la que tendrían si estuviesen colocados en el interior. Tal cuadro (fig. 5) es de construcción bastante difícil y tiene el inconveniente de no permitir la colocación del núcleo de hierro; ha sido utilizado por *Ayrton* y *Mather*, pero su empleo no se extendió.

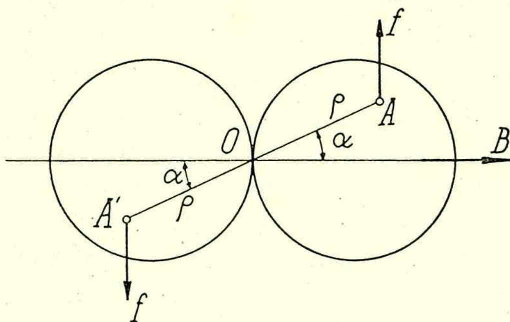
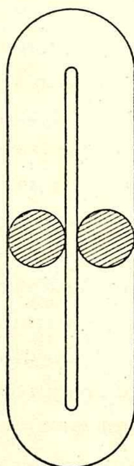


Fig. 4


Fig. 5

Generalmente el cuadro es rectangular: sean n el número de espiras, r el radio del hilo, δ la densidad, a, b, c las dimensiones del cuadro (fig. 6).

A perímetro igual la sección S de una espira es máxima cuando $a = b$; el flujo Φ_0 y la sensibilidad en intensidad (a C constante) son entonces máximas. Pero lo que buscamos es el máximo de sensibilidad a período ideal constante, o si se prefiere, el mínimo de período ideal a sensibilidad constante. Al disminuir el ancho de la espira disminuimos la sección $S = ab$ y por consiguiente el flujo $\Phi_0 = B\,ab$, pero la disminución simultánea de K es más importante, de modo que al reducir C en la misma proporción que K para conservar T_0 constante, en definitiva la sensibilidad se encuentra aumentada. El criterio es pues el cociente $\frac{\Phi_0}{K}$ o sea $\frac{S}{K}$.

El momento de inercia del cuadro es

$$K = \pi r^2 n \delta \left\{ \frac{a c^2}{6} + \frac{a b^2}{2} + \frac{b}{6} (b^2 + c^2) \right\}$$

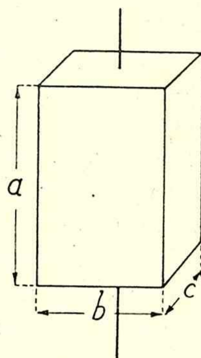


Fig. 6

Si despreciamos c^2 frente a b^2

$$K \cong \frac{\pi r^2 n \delta}{2} \left(a b^2 + \frac{b^3}{3} \right)$$

El cociente $\frac{S}{K}$ es

$$\frac{S}{K} = \frac{2}{\pi r^2 \delta} \cdot \frac{1}{b\left(1 + \frac{b}{3a}\right)}$$

Para aumentarlo hay interés en aumentar a y reducir b: cuando se busca el mínimo de momento de inercia a igualdad de acción se adopta un cuadro largo y estrecho. El aumento de longitud del cuadro se ve limitado por las dificultades de construcción del imán y de centrado del cuadro en el entrehierro. Desde este último punto de vista, se debe una solución particularmente elegante a *Moll*, que no suspende el cuadro sino que lo apreta entre dos hilos tensos, construyendo así un galvanómetro en que $\frac{a}{b} \cong 9$, de período corto y de cero muy estable. En el caso en que no haya interés en realizar un período particularmente corto, se emplean cuadros cuyo ancho no es muy inferior a la longitud ($\frac{a}{b}$ comprendido entre $\sim 1{,}25$ y ~ 3). En el caso particular del

galvanómetro balístico, en el que, como veremos, se busca un período grande, se emplean a veces cuadros cuyo ancho es grande respecto a la longitud ($\frac{a}{b} \cong 0{,}4$, casa Carpentier) .

Generalmente, en los aparatos sensibles, el cuadro no tiene soporte: la solidez mecánica se obtiene gracias a los barnices; en algunos modelos, se emplean soportes muy ligeros. El soporte podría ser total o parcialmente metálico si se quisiera un amortiguamiento electromagnético suplementario intenso y constante.

Se emplea a veces un cuadro móvil circular; el cilindro de hierro dulce se reemplaza por una esfera, pero los polos de los imanes, por razones de facilidad de construcción, están trabajados en forma cilíndrica (fig. 7, galvanómetro Cambridge con la cubierta levantada).

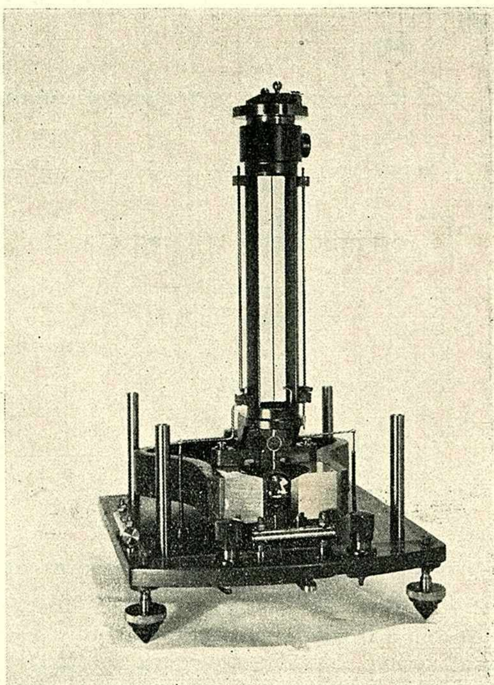
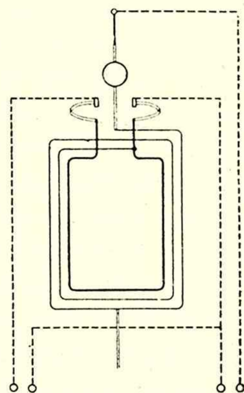


Fig. 7

La resistencia del cuadro aumenta evidentemente con la temperatura. Salvo casos particulares (*Coley*), el circuito del cuadro no es monometálico; para reducir las perturbaciones termoeléctricas se adopta a menudo el hilo de suspensión de cobre. Es importante darse cuenta del efecto termoeléctrico observando el desplazamiento del cero en un circuito de medida cerrado después de haber reemplazado las fuentes por resistencias equivalentes. Se puede eliminar la influencia del efecto termoeléctrico midiendo las desviaciones a partir del falso cero, o aún, siempre que el galvanómetro no presente el fenómeno de desplazamiento del cero, invirtiendo la corriente en el galvanómetro y haciendo el promedio de las desviaciones en los dos sentidos.

6. Cuadros de dos enrollamientos. — Ciertas casas construyen

galvanómetros cuyo cuadro tiene dos enrollamientos, con número de espiras y diámetros de hilo diferentes. Se dispone así de dos sensibilidades, de las que generalmente una es grande en intensidad y la otra en tensión, sin que haya que cambiar de cuadro; por otra parte el enrollamiento no utilizado puede cerrarse sobre una resistencia de valor apropiado, lo que permite regular el amortiguamiento. En el caso del cuadro de dos enrollamientos representado en la fig. 8, la suspensión es de un solo hilo, que lleva la corriente al enrollamiento de hilo más fino; la llegada de la corriente al enrollamiento en hilo de diámetro mayor, lo mismo que el retorno de la corriente, que es común a los dos enrollamientos, se hace por hilos flexibles, p. ej. de plata recocida, que no ejercen acción apreciable sobre el cuadro. Examinaremos en el capítulo IV, el caso de los cuadros de galvanómetros diferenciales, en los que los dos enrollamientos son tan idénticos como es posible.


Fig. 8

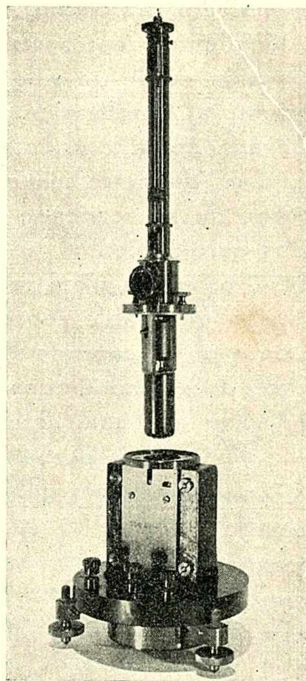
7. Cuadros perpendiculares. — Se puede crear un par director electromagnético regulable agregando al sistema móvil un segundo cuadro, normal al primero y colocado sea en el mismo campo magnético, sea en un campo independiente, creado por un segundo imán o electroimán, pero cuya línea de polos sea paralela a la del primero. En reposo, el plano del segundo cuadro es normal a las líneas de fuerza del campo, que, para fijar las ideas, supondremos uniforme; sea Φ'_0 el flujo total que lo atraviesa. Cuando se envía una corriente i de sentido conveniente al segundo cuadro, éste se encuentra en la posición de equilibrio estable y a una desviación del sistema móvil de un ángulo Θ, corresponde un par director

$$i \frac{d\Phi}{d\Theta} = \Phi'_0 \, i \, sen \, \Theta \cong \Phi'_0 \, i \, \Theta$$

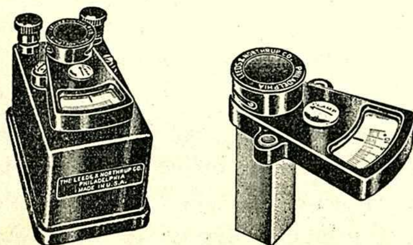
si el ángulo Θ es suficientemente pequeño. El inconveniente del dispositivo, en lo que concierne a los galvanómetros, reside en la complicación de la construcción y el aumento del momento de inercia; la ventaja consiste en una regulación fácil y a distancia del par director, por una simple modificación de la corriente i.

El sistema no presenta interés en los galvanómetros para corriente continua, pero recibe cierto número de aplicaciones en otros aparatos de medidas eléctricas; veremos una más adelante al describir en el capítulo VII el galvanómetro de resonancia de *Vuylsteke*.

8. Intercambiabilidad de diversas partes del galvanómetro. — Las características de un galvanómetro que mejor convienen para un ensayo dado varían con la naturaleza de este ensayo. Discutiremos en detalle esta importante cuestión en el capítulo siguiente, pero dicho esto se concibe que un laboratorio bien equipado debe disponer de una serie de aparatos que abarque toda la gama de características necesaria, lo que ocasiona gastos bastante importantes. Es evidentemente ventajoso poder regular las características (sensibilidad, período, resistencia crítica, etc.) de un galvanómetro sin tener que cambiarlo totalmente: en el caso de los galvanómetros de imán móvil se obra sobre la posición del imán director y se cambian las bobinas; en el caso del galvanómetro de cuadro móvil una solución está dada por el empleo del shunt magnético, y por los cuadros de dos enrollamientos, pero puede ser insuficiente.


Fig. 9

De ahí resulta que los fabricantes han construído en muchos modelos los aparatos de cuadro de modo tal que el que los usa pueda, con cierta facilidad, cambiar la suspensión (III, 4), el cuadro, o aún todo el sistema móvil, ubicado a este efecto en un tubo desmontable; se aprovecha así el mismo soporte, comprendido el imán del aparato. La fig 9 representa un galvanómetro Siemens & Halske con el tubo fuera del soporte; la fig. 10 un aparato portátil de aguja Leeds - Northrup.


Fig. 10

9. Regulación de las constantes del galvanómetro de cuadro.— Hagamos un resumen de los medios de que se dispone para, sin cambiar de cuadro, adaptar mejor un aparato a un caso particular. Es posible obrar sobre:

1) el flujo Φ_0, modificando la inducción en el entrehierro B, con ayuda de un shunt magnético, o excepcionalmente, cambiando de imán, o aún, si se trabaja con un electroimán (caso muy raro en los galvanómetros de corriente continua) haciendo variar la corriente de excitación de éste

2) la constante de torsión C, cambiando de hilo de suspensión

3) el coeficiente de amortiguamiento en circuito abierto A_0, agregando al cuadro algunas espiras de hilo muy fino en corto-circuito. De la relación (5) se deduce

$$R_c = \frac{\Phi_0{}^2}{2\sqrt{KC}-A_0} = \frac{\Phi_0{}^2}{2\sqrt{KC}(1-\alpha_0)} \qquad (13)$$

de modo que el valor de R_c aumenta ligeramente con A_0. El aumento del momento de inercia debido al agregado de espiras es en general poco importante; su acción sobre R_c tiende a compensar la del aumento de A_0

4) el momento de inercia K, fijando sobre el cuadro o el hilo de suspensión un cuerpo adicional elegido generalmente de manera que su momento de inercia propio sea calculable.

Frecuentemente es necesario obrar no sobre uno cualquiera de estos factores, sino sobre varios de ellos, para modificar una magnitud característica, p. ej. la sensibilidad, manteniendo constante otra, p. ej. el período ideal o la resistencia crítica. Veamos un caso determinado. Sea un galvanómetro que se encuentra en condiciones de amortiguamiento crítico, cuya sensibilidad se quiere aumentar. Se puede obtener este resultado aumentando el flujo, p. ej. por acción sobre el shunt magnético, sin hablar del cambio del imán, o también disminuyendo C, cambiando el hilo de suspensión; en ambos casos, como lo demuestra la relación (13), la resistencia crítica aumenta y deja de ser igual a la resistencia del circuito, quedando el galvanómetro demasiado amortiguado. Pero obrando sobre dos factores se puede obtener un aumento de sensibilidad sin que R_c cambie. Supongamcs para simplificar que A_0 sea despreciable y disminuyamos p. ej. C 4 veces:

la sensibilidad aumenta 4 y R_c 2 veces. Disminuyamos ahora el flujo a 0,7 de su valor: R_c vuelve a su valor anterior, mientras que la sensibilidad disminuye 0,7 veces, lo que da un aumento definitivo de sensibilidad de 2,8 veces.

El período ideal del aparato aumenta evidentemente 2 veces, de acuerdo con la expresión

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{K}{C}}$$

Estas consideraciones bastan para dar una idea de como se debe obrar sobre los diferentes factores de acuerdo con el fin perseguido.

Observemos finalmente que muy frecuentemente se reduce la desviación de un galvanómetro mediante resistencias convenientemente elegidas que se agregan en serie o paralelo con el aparato; tal modificación del circuito equivale a una disminución de la sensibilidad del galvanómetro; su empleo no es evidentemente particular a los galvanómetros de cuadro móvil; lo estudiaremos en detalle en el capítulo siguiente (**IV 13, 14**).

BIBLIOGRAFÍA

Ver también la bibliografía del capítulo IV.

1. **W. E. Ayrton et T. Mather** — *The El.* t. 32, p. 627, 1893-94.
2. **Bruckman** — Congrès International d'Electricité, Paris 1932, 2e section, p. 333 — Gauthier - Villars, Paris.
3. **W. R. Coley** — *Journ. Opt. Soc.* t. 11, p. 419, 1925.
4. **M. Deprez y A. d'Arsonval** — *Lum. El.* t. 4, p. 309, 1881 y t. 6, p. 439, 1882.
5. **H. Diesselhorst** — *Zs. f. Instrkde.* t. 31, p. 247 y 276, 1911.
6. **T. Mather** — *Phil. Mag.* t. 29, p. 434, 1890.
7. **A. Michel y L. Veyret** — *R. G. E.* t. 15, p. 43, 1924.
8. **W. I. H. Moll** — *Proc. Amst.* t. 16, p. 149, 1913 y *Proc. Phys. Soc.* t. 35, p. 235, 1923.
9. **R. V. Picou** — Les aimants, leur calcul et la technique de leurs applications—Dunod, Paris, 1928 y *R. G. E.* t. 23, p. 259, 1928.
10. **Reinganum** — *Phys. Zs.* t. 10, p. 91, 1909.
11. **R. Schmidt** — Handbuch der Physik t. 16, p. 269—Springer, Berlin, 1927.
12. **A. T. Ven Ork** — *Philips Techn. Rev.* t. 5, p. 30, 1940.
13. **W. Weber** — Elektrodynamische Messbestimmungen.
14. **F. Venner, E. Weibel et F. C. Weaver** — *Phys. Rev.* t. 3, p. 497, 1914.
15. **W. P. White** — *Phys. Rev.* t. 19, p. 305, 1904 y t. 23, p. 382, 1906.
16. **A. Zeleny** — *Phys. Rev.* t. 23, p. 399, 1906 y t. 32, p. 297, 1911.
17. **A. Zeleny y O. Hovda** — *Phys. Rev.* t. 28, p. 277, 1909.
18. **F. Zernike** — *Proc. Amst.* t. 24, p. 239, 1922.

CAPITULO IV.

Los galvanómetros de imán y cuadro móvil para corriente continua (continuación).

1. Lectura de las desviaciones en los galvanómetros de espejo con escala independiente. — La expresión $\frac{\Theta}{I}$ de la sensibilidad de un galvanómetro no es la corrientemente usada, porque lo que se obtiene directamente no es el ángulo Θ sino el desplazamiento d de un índice. Practicamente, en las diferentes definiciones de la sensibilidad se hace intervenir d, y es necesario buscar la relación entre Θ y d, que en los galvanómetros de espejo, provistos de escala independiente, y en los aparatos de lectura con microscopio, puede variar, entre ciertos límites, al gusto del observador. Hablaremos en IV 4 de los aparatos de lectura con microscopio, examinando primero el caso de los galvanómetros de espejo.

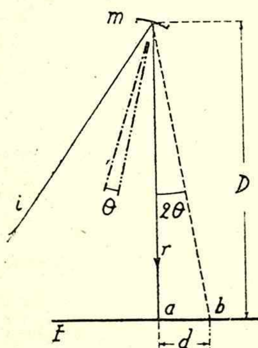


Fig. 1

Se conoce el principio del método de *Gauss - Poggendorf*. Sea D la distancia de la escala E al espejo m (fig. 1), fijo al sistema móvil del galvanómetro. El espejo refleja sobre la escala un spot, es decir, la imagen de una estrecha hendidura luminosa, o la de una hendidura ancha provista de un hilo fino que sirve de referencia. El espejo puede ser cóncavo, dando una imagen real, si

la observación se hace sobre una escala, o plano, si la lectura de las desviaciones se hace con ayuda de un anteojo; se puede evidentemente adaptar un galvanómetro de espejo plano para efectuar lecturas sobre una escala, agregándole una lente convergente.

Sea i el rayo incidente enviado por la fuente luminosa, cuando el galvanómetro está en cero, el spot se encuentra en a sobre la escala E, que debe estar colocada normalmente al rayo reflejado r (fig. 1). Cuando el espejo gira un ángulo Θ, permaneciendo fijo el rayo incidente, el rayo reflejado gira un ángulo 2Θ, el spot va a b. Si la regla, como ocurre a veces, tiene la forma de un arco de circunferencia cuyo centro es el punto de incidencia del rayo en el espejo, la desviación del spot, d, leída sobre la regla, es

$$d = 2\,D\,\Theta \qquad \text{de donde} \qquad \Theta = \frac{d}{2\,D} \tag{1}$$

Pero generalmente la regla es recta (fig. 1), de manera que se tiene

$$d = D\,tg\,2\,\Theta \tag{2}$$

de donde resulta

$$\Theta = \frac{1}{2}\,arc\,tg\,\frac{d}{D} = \frac{d}{2\,D}\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{d^2}{D^2} + \frac{1}{5}\,\frac{d^4}{D^4} - \ldots\ldots\right) \tag{3}$$

Supongamos el ángulo Θ lo suficientemente pequeño como para que se pueda limitar el desarrollo a su primer término; resulta entonces

$$\Theta = \frac{d}{2\,D} \tag{1}$$

y si, como ocurre con frecuencia, se expresa d en milímetros y D en metros

$$\Theta = \frac{d_{mm}}{2000\,D_m} \tag{1a}$$

2. Sensibilidad aparente en intensidad. Distancia máxima del espejo a la escala. Elección del espejo. — Para el mismo valor I de la corriente, y por consiguiente de Θ, d crece proporcionalmente a D, lo que permite, aumentando D, medir con el mismo aparato corrientes más pequeñas. Se puede así definir la sensibilidad en intensidad que llamaremos "aparente"

$$S_{api} = \frac{d}{I} \tag{5}$$

Su valor crece proporcionalmente a D. Esta magnitud es la que generalmente interesa cuando D permanece constante en el curso de varias medidas efectuadas con el mismo aparato. Pero si D varía en el curso de las medidas, o aún si se quieren comparar racionalmente entre sí las desviaciones que se obtendrían para la misma corriente con aparatos distintos, es necesario referir los valores de S_{api} a un mismo valor D_1 de D. En general D_1 es igual a 1 m.; se define así $\frac{d}{D_1 I}$ (o su inversa) como la sensibilidad en intensidad, que, para evitar confusiones, llamaremos "práctica"; esta magnitud, que será precisada en **IV,6**, representa, a menos de un coeficiente numérico constante, $\frac{\Theta}{I}$, y caracteriza realmente la sensibilidad del galvanómetro, aunque no completamente. Se puede en efecto, en algún caso particular, querer aumentar la sensibilidad aparente de un aparato aumentando D; cabe preguntarse cual es el valor máximo que se podrá alcanzar, valor que por supuesto puede ser distinto para dos aparatos que tienen la misma sensibilidad práctica. El problema consiste en determinar el valor máximo que se puede dar a la distancia D. Para eso observemos que el espejo no da una imagen con bordes netos, sino una mancha de difracción; la forma de la repartición de la iluminación E está representada en la fig. 2. Sea a el ancho de la banda central; la teoría de la difracción da, siendo λ la longitud de onda:

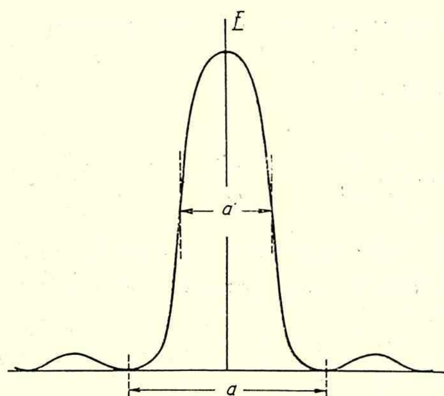


Fig. 2

$$a = \frac{2D\lambda}{c} \tag{6}$$

si el espejo es rectangular de ancho c, o

$$a = \frac{2{,}44\, D\lambda}{\delta} \tag{7}$$

si el espejo es circular de diámetro δ.

El ancho del spot, a causa de la forma de la curva de distribución de la iluminación, parecerá al ojo igual a $a' < a$, estando a' bastante mal definido; de ahí resulta una falta de certeza en la determinación visual de la posición del spot, tanto más grande cuanto mayor es a; se admite en la práctica que si $a = 1$ mm. la posición del spot no puede definirse sino con una precisión de 0,2 mm. Inversamente, para poder apreciar una desviación $d = 0{,}2$ mm., a no debe sobrepasar 1 mm., o sea, admitiendo como promedio $\lambda = 5.\ 10^{-5}$ cm., la distancia D no debe sobrepasar

$$D_{max} = \frac{c\,a}{2\lambda} \cong 1000\,c \tag{8}$$

o

$$D_{max} = \frac{\delta\,a}{2{,}44\lambda} \cong 800\,\delta \tag{9}$$

según que el espejo sea rectangular o circular, estando c y δ expresadas en centímetros. Así, para $\delta = 1$ cm., $D_{max} = 8$ m. Pero colocar la escala a tal distancia presenta varios inconvenientes. Abstracción hecha del excesivo espacio ocupado, hay que considerar el problema del brillo del spot, que varía en razón inversa de D^2, y si bien el brillo es en general ampliamente suficiente cuando la escala se coloca a un metro de distancia (caso usual), no lo es más cuando la distancia es D_{max}, salvo si se estudian especialmente las condiciones de lectura. Es de notar que el brillo del spot es también proporcional a la superficie del espejo, al menos si éste queda enteramente iluminado. Finalmente, al aumentar las dimensiones del espejo con el fin de aumentar D_{max}, se aumenta el momento de inercia del órgano móvil y por consiguiente el período. Ahora bien, el período no debe ser superior a un cierto valor, que depende de la clase de las medidas que se quieren efectuar, y es fácil ver que a igualdad de período existe una dimensión óptima del espejo en vista de la obtención de la sensibilidad aparente máxima (*Volkmann*).

La sensibilidad en intensidad de un galvanómetro de cuadro móvil, es

$$\frac{\Theta}{I} = \frac{g}{c} \tag{10}$$

En el galvanómetro de cuadro móvil de campo radial $g = \Phi_o$; en el galvanómetro de imán móvil, las expresiones de g y C dependen del tipo del aparato; así p. ej. en el galvanómetro de *Lord Kelvin*, $g = 2\,M\,G$ y $C = M_r\,H_d$.

La sensibilidad aparente, con $D = D_{max}$, se escribe

$$S_{api} = \frac{d}{I} = \frac{2 D_{max} g}{C} = \frac{T_o{}^2 g}{2\pi^2} \frac{D_{max}}{K} \tag{11}$$

teniendo en cuenta que $T_o = 2\pi \sqrt{\frac{K}{C}}$.

Si queremos mantener $T_o = C^{te}$ al cambiar de espejo, lo que modifica K, tendremos que modificar el par director unitario C. K comprende el momento de inercia del espejo, K_e y el de la parte restante del órgano móvil, K_o; solo K_e varía. Si suponemos, para fijar las ideas, el espejo circular, de espesor e muy pequeño, pegado en tal forma que se pueda admitir que su eje coincida con el hilo de suspensión, tendremos

$$K_e = A\,\delta^4 e$$

siendo A una constante. Por otra parte D_{max} es proporcional a δ, de modo que la relación (11) se transforma en

$$S_{api} = C^{te} \frac{\delta}{K_o + A\,\delta^4 e} \tag{12}$$

Si suponemos e proporcional a δ, es inmediato ver que S_{api} es máxima para $K_e = A\,\delta^4 e = \frac{K_o}{4}$; en cambio si el espesor de una serie de espejos de diferentes diámetros fuese constante, S_{api} sería máxima para $K_e = \frac{K_o}{3}$.

3. Galvanómetros de espejo con amplificación óptica. — Los inconvenientes del excesivo espacio ocupado y de la iluminación deficiente del spot cuando $D = D_{max}$ se pueden evitar gracias a procedimientos ópticos de amplificación, que vamos a recordar rapidamente.

a) *Amplificación por reflexiones múltiples entre el espejo móvil y un espejo (o prisma de reflexión total) fijo.* Si se quiere que el rayo incidente, paralelo al espejo fijo m_f, vuelva sobre sí mismo después de n reflexiones sobre el espejo móvil m (o sea después de $2n - 1$ reflexiones en total), se dará al ángulo de los dos espejos el valor $\beta = \frac{\pi}{2n}$; en particular, si $n = 2$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ (fig. 3). Se ve inmediatamente que a una rotación Θ del espejo móvil corresponde una rotación $2n\Theta$ del último rayo reflejado; la amplifica-

ción es pues igual a n. Por este procedimiento se puede aumentar la sensibilidad aparente más allá de los límites impuestos por la difracción en el caso de una reflexión única, pero es inmediato ver que por este camino no se puede ir muy lejos. En efecto, por el hecho de la inclinación del espejo respecto a los rayos incidentes, su ancho aparente disminuye, haciéndose igual a $c \ sen \ \beta$ en lugar de c, de manera que si D_{max} es la mayor distancia cuando el espejo es normal a los rayos incidentes, inclinándolo $\beta = \frac{\pi}{2n}$ no se puede colocar la escala más que a

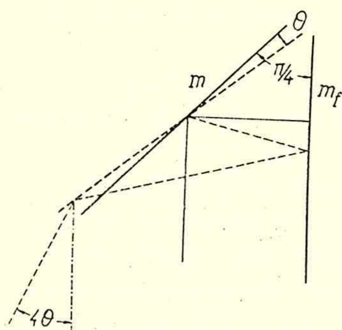


Fig. 3

$$D'_{max} = D_{max} \ sen \ \frac{\pi}{2n} \qquad (13)$$

Supongamos pues la escala a esta distancia y agreguemos el espejo fijo: la desviación se convierte en

$$d' = 2 \ n \ \Theta D'_{max} = 2 \ \Theta \ D_{max} \ n \ sen \ \frac{\pi}{2n}$$

confundiendo el arco y la tangente. Sin amplificador, la distancia sería D_{max} y la desviación $d = 2 \ \Theta \ D_{max}$, de manera que la amplificación es

$$\frac{d'}{d} = n \ sen \ \frac{\pi}{2n} \qquad (14)$$

Para $n = 2$, $D'_{max} = 0{,}71 \ D_{max}$ y $\frac{d'}{d} = 1{,}41$; aumentando n, D'_{max} disminuye en forma apreciable, pero d' aumenta muy poco; hay que observar también que un gran número de reflexiones no es posible a causa de la difusión y absorción de los espejos. En realidad el cálculo hecho no es más que una aproximación; la abertura aparente varía con la desviación; es de notar que los dos espejos no pueden aproximarse hasta tocarse, ya que el espejo móvil debe poder girar en los dos sentidos.

Se puede también utilizar el sistema en que el espejo fijo es paralelo al móvil en reposo; la salida del rayo se hace del lado opuesto al de la entrada. Se reduce así D'_{max}, pero d' disminuye

un poco. Si γ es el ángulo de entrada (fig. 4), la abertura útil es $\frac{c}{n} \cos \gamma$, y resulta

$$D'_{max} = D_{max} \frac{\cos \gamma}{n} \quad (15)$$

y

$$d' = 2\,n\,\Theta\,D'_{max} = 2\,\Theta\,D_{max} \cos \gamma = d \cos \gamma \quad (16)$$

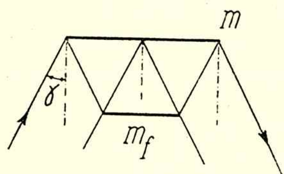


Fig. 4

En lugar de espejo *White* se sirvió de un prisma de reflexión total con arista horizontal, que permite duplicar la desviación horizontal y anular la oscilación parásita vertical del cuadro, la que, sin ser un inconveniente importante, molesta un poco en la lectura.

b) *Amplificación por sistemas de aumento.* En primera aproxiximación la desviación y el ancho del spot resultan multiplicados por el aumento del sistema empleado. Uno de ellos consiste p. ej. en un espejo convexo, que se elegirá cilíndrico y no esférico, para limitar la amplificación en altura y por consiguiente la superficie de la imagen; se obtiene de esta manera una iluminación muy satisfactoria. *Dubar* indica que se puede así ubicar en una caja de 0,35 m. de longitud un conjunto equivalente a una distancia sin dispositivo de amplificación igual a 5 m.

De lo que precede, se podría deducir que admitiendo un período suficientemente largo y aumentando las dimensiones del espejo se podría aumentar considerablemente D_{max}, es decir, revelar corrientes cada vez menores. Pero no es así; como veremos más adelante (IV, 15), el cero del galvanómetro es siempre *naturalmente inestable*, y como las fluctuaciones están amplificadas al mismo tiempo que la desviación debida a la corriente a revelar, es necesario que esta última sea suficientemente importante para que la medida sea segura.

La amplificación de las desviaciones puede también ser mecánica. El espejo está separado del órgano móvil del galvanómetro; la rotación de este último se comunica al espejo por intermedio de un brazo. El sistema no presenta interés en los galvanómetros de corriente continua, pero lo encontraremos en el capítulo XI, p. ej. en el oscilógrafo de *Dubois*.

Observemos finalmente que se puede obtener una amplificación muy interesante de las desviaciones por relés térmicos y fotoeléctricos; la examinaremos más adelante (IV, 16).

4. Galvanómetros sin espejo, de lectura con microscopio — Anticipándonos a los capítulos que van a seguir, observemos que en ciertos galvanómetros, p. ej. los de cuerda o bucle, o el de resonancia de *Agnew*, el movimiento del órgano móvil se observa directamente con el microscopio micrométrico. Podemos evidentemente preguntarnos cual es el valor de la distancia D de un espejo ficticio a la escala, equivalente al aumento dado por el microscopio. *Einthoven* toma como criterio para esta equivalencia la identidad del error óptico en los dos casos, que se traduce por la relación

$$\frac{2D}{\delta} = \frac{G}{O} \qquad (17)$$

en que δ es el diámetro del espejo ficticio y G y O el aumento y la abertura del objetivo respectivamente. Así para $O = 0{,}95$, un aumento de 950 equivale a una distancia igual a 1 m. de la escala al espejo de 2 mm. de diámetro.

5. Galvanómetros de índice de longitud constante. — Se distinguen los aparatos portátiles de índice óptico y los de índice mecánico. En los de índice óptico la fuente luminosa y la escala no se pueden desplazar, formando una unidad con el aparato; la distancia de la escala al espejo es relativamente pequeña, del orden de 10 cm. p. ej; pero se conserva el beneficio de duplicarla por la reflexión. Este beneficio no existe en los aparatos de índice mecánico, lo que disminuye aún más su sensibilidad aparente, que ya es pequeña porque debido al aumento del momento de inercia al agregar el índice mecánico ha sido necesario, con el fin de conservar un período corto, aumentar el par director. La escala de los galvanómetros de índice mecánico es generalmente corta; como ya dijimos en III,4 estos aparatos se utilizan de preferencia como aparatos de cero; su ventaja reside en que no necesitan fuente luminosa y en que son baratos.

6. Sensibilidad práctica en intensidad. — Pasaremos ahora a precisar las definiciones usuales de la sensibilidad en intensidad.

En el caso de los galvanómetros sensibles de espejo de índice de longitud variable, los catálogos indican normalmente la sensibilidad práctica $\frac{d}{DI}$, o su inversa.

Definiremos pues la "sensibilidad práctica por ampere", S_A^{-1} como la desviación ficticia que produciría una corriente de 1 A. sobre una escala graduada en milímetros y colocada a 1 m. del

espejo. Es evidente que S_A^{-1} no corresponde a la realidad experimental; es una simple convención, y se calcula por proporcionalidad. Sea d (en milímetros) la desviación correspondiente a I (en amperes), y D (en metros) la distancia de la regla al espejo; S_A^{-1} se escribe

$$S_A^{-1} = \frac{d}{D\,I}\ mm/m.A = 2.10^3\ \frac{\Theta}{I} = 2.10^3\ \frac{g}{C} \tag{18}$$

Se expresa a veces S_A^{-1} en mm/A en lugar de mm/m.A o A^{-1}, confundiendo la sensibilidad práctica con la aparente, numericamente igual a la primera en el caso en que la escala está colocada a 1 m.

El número obtenido para S_A^{-1} es muy grande, y como los galvanómetros sensibles sirven para medir o acusar corrientes comprendidas en general entre 10^{-7} y 10^{-11} A, es más cómodo utilizar la "sensibilidad práctica por microampere", $S_{\mu A}^{-1}$, obtenida reemplazando en la definición de S_A^{-1} el término ampere por microampere. Resulta pues

$$S_{\mu A}^{-1} = \frac{d}{D\,I\,10^6}\ mm/m.\mu A = 2.10^{-3}\ \frac{\Theta}{I} = 2.10^{-3}\ \frac{g}{C} \tag{19}$$

donde I, g y C están expresadas en cualquier sistema coherente que tenga el ampere como unidad de corriente eléctrica, de preferencia el sistema Giorgi (*u. G.*).

Igual que para S_A^{-1}, a veces se expresa $S_{\mu A}^{-1}$ en mm/μA, entendiéndose que la escala está a 1 m.

El valor de $S_{\mu A}^{-1}$ figura frecuentemente en los catálogos; pero con la misma frecuencia se define la sensibilidad práctica como la corriente en amperes que produciría una desviación de 1 mm. sobre una escala colocada a 1 m. de distancia, o sea como la inversa de S_A^{-1}: la llamaremos "sensibilidad práctica en amperes" y la designaremos por S_A; se la expresa a veces en A/mm en lugar de m.A/mm, o A, entendiéndose que la escala está a m. Se tiene evidentemente

$$S_A\ \frac{m.A}{mm} = \frac{10^{-6}}{S_{\mu A}^{-1}\ \frac{mm}{m.\mu A}} \tag{20}$$

Tomemos un ejemplo: la sensibilidad práctica en intensidad

de un galvanómetro se indicará indiferentemente como igual sea a 500 mm/m.µA ($S_{\mu A}^{-1}$), sea a 2 10^{-9} m.A/mm (S_A).

La representación de la sensibilidad por S_A corresponde a una realidad experimental, lo que no ocurre con $S_{\mu A}^{-1}$; no obstante, a los efectos de la clasificación o el cálculo, esta observación no quita nada al valor de $S_{\mu A}^{-1}$, que es cómodo de escribir.

En los galvanómetros de lectura por microscopio, se expresa generalmente la sensibilidad práctica como la corriente en amperes que produce una desviación de una *división*, especificando siempre el valor del aumento correspondiente.

Es también el caso de los galvanómetros de índice de longitud constante, que están caracterizados por la sensibilidad aparente. La sensibilidad práctica puede definirse como la corriente en amperes o microamperes que provoca una desviación de una *división de la escala*, la que no está en general graduada en mm.; pero la longitud de la escala en milímetros y el valor del ángulo correspondiente a la desviación completa se suelen indicar. Con bastante frecuencia la sensibilidad práctica de estos galvanómetros se caracteriza también por el valor de la corriente, en microamperes o miliamperes, que provoca *toda* la desviación de la escala, analogamente a lo adoptado en los aparatos industriales.

7. Sensibilidad relativa. — Esta magnitud tiene importancia para caracterizar el error relativo $\frac{\Delta I}{I}$ sobre el valor leído I de la corriente, debido al error de lectura $\Delta \Theta$.

Se tiene

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{1}{I} \frac{dI}{d\Theta} \Delta \Theta = \frac{\Delta \Theta}{S_r}$$

definiendo la sensibilidad relativa

$$S_r = I \frac{d\Theta}{dI} \qquad (21)$$

En los aparatos de escala proporcional $\frac{d\Theta}{dI} = \frac{\Theta}{I}$ y $S_r = \Theta$: la precisión de la medida es tanto mayor cuanto mayor es la desviación.

8. Sensibilidad práctica en megoohms. — Es el valor en megoohms que debe tener la resistencia total del circuito de la fig. 5, donde obra una f. e. m. de 1 V., para obtener una desviación de 1 mm., estando la escala graduada en milímetros a un metro del espejo.

De la misma definición resulta que numericamente la sensibilidad práctica en megoohms es igual a la práctica por microampere.

9. Sensibilidad y sensibilidad práctica en tensión.— La sensibilidad en intensidad es un dato que permite elegir el galvanómetro (aparte de lo referente al período y al amortiguamiento, sobre lo que volveremos) cuando éste se emplea en un circuito de intensidad constante, es decir, ya sea cuando se regula la intensidad a un valor constante, ya sea cuando la resistencia del galvanómetro es despreciable frente a la resistencia en serie con él, como ocurre p. ej. en la medida de la corriente a través de una resistencia de aislamiento Este último caso no es sin embargo más que un caso límite de otro más general, en el que la resistencia del galvanómetro modifica la distribución de las corrientes en el circuito: se concibe inmediatamente que la ventaja debida a la introducción de un aparato más sensible en intensidad puede ser contrabalanceada por la disminución de la corriente en el aparato y la noción de sensibilidad en intensidad no basta ya para juzgar sobre la conveniencia del empleo de un galvanómetro dado. Tal será el caso de la medida directa de una d. d. p. (fig. 5), pero también de las medidas con puentes, potenciómetros, etc., circuitos que pueden reducirse, desde el punto de vista del comportamiento del galvanómetro, al circuito de la fig. 5. Consideremos en efecto, a título de ejemplo, el caso clásico del potenciómetro de la fig. 6; cuando la f. e. m. e de la pila difiere en una cantidad muy pequeña $\triangle e$ del valor que corresponde a la posición de equilibrio, la corriente en el galvanómetro es

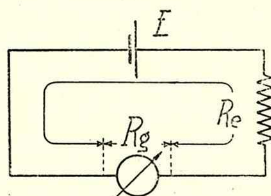


Fig. 5

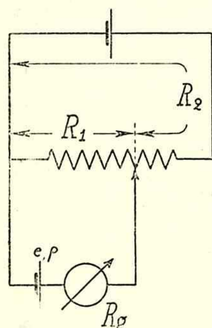


Fig. 6

$$I = \frac{\triangle e}{R_g + \varrho + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \qquad (22)$$

Consideremos ahora el circuito de la fig. 5; designemos por E la fem de la pila y por R_e la resistencia exterior al galvanómetro, comprendida la de la pila; la corriente en el circuito es

$$I = \frac{E}{R_g + R_e} \qquad (23)$$

Basta comparar las relaciones (22) y (23) para ver la equivalencia.

Limitemosnos pues al circuito de la fig. 5; se tiene inmediatamente

$$S_i = \frac{\Theta}{I} = \frac{\Theta}{E} (R_g + R_e) = S_t (R_g + R_e)$$

con

$$S_t = \frac{\Theta}{E} = \frac{S_i}{R_g + R_e} \qquad (24)$$

La sensibilidad en tensión S_t se obtiene pues dividiendo la sensibilidad en intensidad S_i por la resistencia del circuito. A la sensibilidad en tensión $S_t = \frac{\Theta}{E}$ corresponde la sensibilidad práctica en tensión $S_{\mu v^{-1}} = \frac{d}{D\,E}$ (o S_v) y la sensibilidad aparente en tensión $\frac{d}{E}$ o su inversa.

Estas magnitudes no son constantes del aparato, dependen también del circuito de medida y por lo tanto deben determinarse en cada caso. Sin embargo, a los efectos de la clasificación de los aparatos, se define la sensibilidad práctica en volts (S_V), o por microvolt ($S_{\mu V^{-1}}$), como valor particular de S_v o $S_{\mu v^{-1}}$ relativo a una resistencia total del circuito igual, sea a la resistencia interior del galvanómetro, que puede ser de imán o de cuadro móvil, sea a la resistencia crítica, en el caso del galvanómetro de cuadro móvil solamente. La primera definición es general, válida también para otros tipos de galvanómetros, como p. ej. el de bucle, pero en el caso de un galvanómetro de cuadro móvil es preferible la elección de R_c a la de R_g porque generalmente se trata de hacer funcionar ese galvanómetro en un circuito de resistencia igual a R_c: la cifra de S_V obtenida tomando R_c como base es pues frecuentemente de aplicación inmediata.

Las definiciones de las sensibilidades prácticas por microvolt y en volts son análogas a las que hemos dado para las sensibilidades prácticas por microampere y en amperes. Se distinguen así:

la sensibilidad práctica por microvolt $S_{\mu V^{-1}}$ en mm/m.μV que es la desviación en milímetros que produciría una tensión de 1 μV.

la sensibilidad práctica en volts S_V, en m.V/mm que es la tensión en volts que produce una desviación de 1 mm.

En los dos casos se sobreentiende que la regla está a un metro del espejo; pero la tensión puede considerarse aplicada sea *directamente* en los bornes del aparato ($R = R_g$), sea si se trata de un galvanómetro de cuadro móvil, en los bornes del conjunto del galvanómetro y una resistencia R_{ce} en serie, tal que $R_{ce} + R_g = R_c$; la resistencia R_{ce} recibe el nombre de resistencia crítica exterior, su valor se indica frecuentemente en los catálogos en vez de R_c. *Hay pues que asegurarse, cada vez que se quiere utilizar un valor de la sensibilidad en volts, de la definición que ha servido de base para su cálculo,* y recordar que la cifra indicada vale solamente en las mismas condiciones de la definición. Como en los galvanómetros de cuadro R_c puede ser en ciertos casos 20 y más veces mayor que R_g (aunque hay aparatos en que R_c se confunde practicamente con R_g, comprendiendo R_g la resistencia de los hilos de suspensión además de la del cuadro) se ve que el error cometido interpretando mal un valor de S_V dado por un catálogo puede ser muy importante.

Se tiene pues

$$S_{\mu V^{-1}} = \frac{S_{\mu A^{-1}}}{R_g} \quad \text{o} \quad S_{\mu V^{-1}} = \frac{S_{\mu A^{-1}}}{R_c} \qquad (25)$$

así como

$$S_V = S_A R_g \quad \text{o} \quad S_V = S_A R_c \qquad (25a)$$

según el caso.

Cuando la resistencia total del circuito cambia, la sensibilidad práctica en *tensión* varía en razón inversa:

$$S_{\mu v^{-1}} = S_{\mu V^{-1}} \frac{R_g}{R_g + R_e} \quad \text{o} \quad S_{\mu v^{-1}} = S_{\mu V^{-1}} \frac{R_c}{R_g + R_e} \qquad (26)$$

10. Condiciones que permiten realizar el máximo de sensibilidad en tensión. — Estudiaremos ahora la influencia de las resistencias del circuito y del galvanómetro sobre la sensibilidad en tensión. Examinemos sucesivamente los casos de los galvanómetros de imán y de cuadro móvil.

1. *Galvanómetro de imán móvil.*

Consideremos, para fijar las ideas, el galvanómetro astático de Lord Kelvin de cuatro bobinas, pero el razonamiento que sigue y los resultados se extienden evidentemente para cualquier otro tipo de galvanómetro de imán móvil. Hemos visto (II, 8) que la sensibilidad en intensidad es

$$S_i = \frac{\Theta}{I} = \frac{2M_1\, G_1}{M_r\, H_d} = \frac{4\, M_1\, G}{M_r\, H_d} \tag{27}$$

introduciendo la constante G de *una* sola bobina; su valor, en el caso en que su sección transversal es rectangular, está dado por la fórmula (4), II, 1. Al establecer la relación (27) hemos supuesto implícitamente que las cuatro bobinas estaban en serie; pero la fórmula valdría también para las bobinas acopladas en dos grupos en serie, de dos bobinas en paralelo cada uno, o las cuatro en paralelo, si llamásemos I a la corriente en las bobinas y no a la total a través del galvanómetro. Sin embargo en la expresión de la sensibilidad se entiende siempre que I es la corriente total, de modo que al cambiar de acoplamiento hay que escribir

$$S_i = \frac{\Theta}{I} = \frac{2\, M_1\, G}{M_r\, H_d} \tag{27a}$$

o

$$S_i = \frac{\Theta}{I} = \frac{M_1\, G}{M_r\, H_d} \tag{27b}$$

si las bobinas están conectadas en serie-paralelo o en paralelo respectivamente.

Vamos a transformar las relaciones (27) poniendo en evidencia la acción de los factores que interesan directamente la aplicación, a saber, el período ideal por una parte y la resistencia interior por otra.

Busquemos la relación entre la constante G de una bobina y su resistencia r_g; sea n el número de espiras de la bobina, l la longitud de la espira media, s y ϱ la sección y la resistividad del hilo respectivamente; tendremos

$$G = \gamma\, n \tag{28}$$

donde γ depende solo de las dimensiones de la bobina, y

$$r_g = \varrho\, n \frac{l}{s} = \frac{l\, n^2}{S\, a} \tag{29}$$

llamando

$$a = \frac{n s}{S} \tag{30}$$

a la relación entre la sección $n\, s$ realmente ocupada por el conductor y la sección transversal S de la bobina. Eliminemos n entre (28) y (29); obtenemos

$$G = \varepsilon \sqrt{a\, r_g} \tag{31}$$

donde el coeficiente ε es función unicamente de las dimensiones de las bobinas y de la resistividad del hilo empleado. Se deduce que si se construye una serie de bobinas que tengan las mismas dimensiones, constituidas por hilos del mismo metal pero de diámetros diferentes, ε será un constante para toda la serie.

Reemplacemos en las ecuaciones (27) G por su expresión dada por (31), $M_r\, H_d$ por

$$M_r\, H_d = \frac{4\pi^2 K}{T_o^{\,2}} \tag{32}$$

deducida de la expresión de T_o, y finalmente r_g en función de la resistencia total del aparato R_g, observando que R_g es igual respectivamente a $4\, r_g$, r_g, $\frac{r_g}{4}$ cuando las bobinas están conectadas en serie, serie-paralelo o paralelo. Se obtiene la relación única

$$S_i = \frac{\Theta}{I} = \frac{M_1\, \varepsilon \sqrt{a R_g}}{2\, \pi^2\, K}\, T_o^{\,2} = A\, T_o^{\,2} \sqrt{a{\cdot}R_g} \tag{33}$$

válida cualquiera que sea el acoplamiento de las bobinas.

La sensibilidad en tensión se escribe pues, llevando la expresión (33) de S_i a (24):

$$S_t = \frac{\beta \sqrt{a R_g}}{R_g + R_e} \tag{34}$$

donde $\beta = A T_o^{\,2}$ es una constante para un galvanómetro dado cuyo imán corrector esté en una posición determinada; β no varía cuando se cambian las bobinas del galvanómetro por otras de las mismas dimensiones y confeccionadas con hilo del mismo metal.

Hay que considerar dos casos:

a) se dispone de bobinas de recambio: en este caso, a cada valor de R_e corresponde un valor de R_g que hace la sensibilidad en tensión máxima; veremos que esta sensibilidad máxima varía en razón inversa de $\sqrt{R_e}$.

Para poder discutir S_t (R_g) hay que saber como se comporta el coeficiente a. Llamemos w al coeficiente de llenado, cuyo valor es $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ si las espiras están bobinadas cada una en el intervalo formado por las dos espiras vecinas de la capa precedente, d al diámetro del hilo y t al espesor de la aislación de las espiras; se tiene

$$S = w\, n\, \frac{\pi}{4}\, (d + 2\, t)^2$$

de donde

$$n = \frac{4\, S}{\pi\, w\, (d + 2\, t)^2} \quad \text{y} \quad a = \frac{n\, s}{S} = \frac{d^2}{w\, (d + 2\, t)^2}$$

La resistencia interior del galvanómetro es, con $p = 4$, 1 o $\frac{1}{4}$ según el acoplamiento de las bobinas

$$R_g = p\, r_g = p\, \varrho\, n\, \frac{4\, l}{\pi\, d^2} = \frac{u\, p}{w\, d^2\, (d + 2\, t)^2}$$

donde $u = Cte.$ Resulta pues

$$S_t = \frac{\beta \sqrt{a R_g}}{R_e + R_g} = \frac{\beta \sqrt{u\, p}}{R_e\, w\, (d + 2\, t)^2 + \frac{u\, p}{d^2}} \tag{35}$$

Supongamos por ahora que solo se cambian las bobinas pero no su acoplamiento ($p = Cte$). Se pueden distinguir dos casos:

1.°) hilo aislado con seda: en este caso el espesor de la aislación t es sensiblemente independiente del diámetro del hilo, $t = Cte.$

2.°) hilo esmaltado: el espesor de la aislación t es sensiblemente proporcional al diámetro d del hilo.

Estudiemos estos dos casos, suponiendo que el valor de w es el mismo para todas las bobinas, o sea que todas las bobinas están construídas de la misma manera.

1.° $t = Cte.$ Se encuentra inmediatamente que hay máximo de S_t para $\frac{\delta\, S_t}{\delta\, d} = 0$, o sea cuando

$$\frac{R_e}{R_g} = \frac{d + 2\, t}{d} \tag{36}$$

Este resultado fué enunciado por *Maxwell.*

2.° $t = c\,d$, siendo c una constante.

En este caso $a = \frac{1}{w(1+2c)^2} = Cte$ y se puede escribir

$$S_t = \frac{\frac{\beta}{\sqrt{w}\,(1+2c)}\sqrt{R_g}}{R_e + R_g} = \frac{\frac{\beta}{\sqrt{w}\,(1+2c)}}{\sqrt{R_g} + \frac{R_e}{\sqrt{R_g}}}$$

En el denominador figura la suma de dos términos cuyo producto es constante; S_t es pues máximo cuando estos términos son iguales, o sea cuando

$$R_e = R_g \tag{37}$$

resultado válido en particular cuando $c = 0$, es decir, cuando se desprecia el valor de la aislación. Este resultado ha sido enunciado por *Ayrton* y *Perry.*

Es interesante observar que la condición (37) corresponde al máximo de la potencia absorbida por el galvanómetro. En efecto, como hemos visto

$$\frac{\Theta}{I} = \beta\sqrt{aR_g} \qquad \text{de donde} \qquad \Theta = \beta\sqrt{aR_g I^2}$$

$R_g\, I^2$ es la potencia perdida por efecto Joule en las bobinas; se escribe

$$R_g\, I^2 = R_g \left(\frac{E}{R_g + R_e}\right)^2 = \frac{E^2}{\left(\sqrt{R_g} + \frac{R_e}{\sqrt{R_g}}\right)^2}$$

expresión que es máxima para

$$R_g = R_e$$

Las bobinas de un galvanómetro de imán son facilmente intercambiables, de manera que se podrán elegir aquellas más convenientes para cada caso particular. Sin embargo, el número de bobinas de recambio disponibles es evidentemente limitado, entre otras cosas porque no se fabrica corrientemente sino un número restringido de hilos de diferentes diámetros y generalmente no se dispone de bobinas que realicen exactamente el máximo de S_t ; pero es fácil ver que la sensibilidad máxima se reduce poco aún

cuando existan diferencias importantes entre R_g y R_e. Pongamos $R_g = m\ R_e$, y para simplificar consideremos solamente el caso en que $t = c\ d$; conviene observar que las conclusiones son sensiblemente las mismas cuando $t = Cte$ *(Brooks)*.

La sensibilidad S_t se escribe

$$S_i = \frac{\beta \sqrt{a R_g}}{R_e + R_g} = \frac{\beta \sqrt{a}}{\sqrt{R_e}} \cdot \frac{\sqrt{m}}{1 + m} \tag{38}$$

S_t es máximo para $m = 1$, o sea

$$S_{t\,max} = \frac{\beta \sqrt{a}}{2 \sqrt{R_e}} = \frac{S_i}{2 R_g} \tag{39}$$

La sensibilidad máxima es tanto menor cuanto menor es a, o sea cuanto más lugar ocupa la aislación y el espacio libre entre espiras.



Si pasamos a las sensibilidades prácticas (39) se escribe

$$S_{\mu v^{-1}\,max} = \frac{S_{\mu A^{-1}}}{2 R_g} = \frac{S_{\mu V^{-1}}}{2}$$

La máxima sensibilidad práctica en tensión que se puede realizar es igual a la mitad de la sensibilidad práctica por microvolt indicada en los catálogos. Sería pues preferible que estos últimos indicasen $\frac{S_{\mu V^{-1}}}{2}$ y no $S_{\mu V^{-1}}$.

Pongamos (38) bajo la siguiente forma

$$\frac{S_t}{S_{t\,max}} = \frac{2 \sqrt{m}}{1 + m} \tag{38a}$$

Se observa que si se cambia m en $\frac{1}{m}$ el valor de $\frac{S_t}{S_{t\,max}}$ es el mismo; eligiendo la escala logarítmica para las abscisas la curva es simétrica respecto al eje $m = 1$. Se verifica inmediatamente (fig. 7) que la sensibilidad disminuye relativamente poco cuando nos alejamos de la condición óptima $m = 1$; así para $m = \frac{1}{4}$ o $m = 4$, $\frac{S_t}{S_{t\,max}}$ es todavía igual a 0,8. Será pues suficiente un pequeño número de bobinas de recambio para poder cubrir en buenas condiciones de sensibilidad en tensión una extensa gama de valores de R_e, tanto más que en el galvanómetro de *Lord Kelvin*

se puede variar R_g, a r_g constante, en la relación de 1 a 16, cambiando el acoplamiento de las bobinas En este caso, en la ecuación (35) p es la única variable, y es inmediato ver que S_t es máxima para $R_g = R_e$: cada cambio de acoplamiento equivale a un juego suplementario de bobinas.

En el caso particular en que R_e es muy grande (p. ej. en la medida de resistencias de aislamiento por el método de la desviación), R_g, que no sobrepasa normalmente algunos miles de ohms, es despreciable frente a R_e. Hay entonces interés en elegir R_g tan grande como sea posible. Esto se interpreta facilmente a partir de lo que antecede, porque aumentando R_g nos aproximamos algo a las condiciones óptimas; pero se interpreta también observando que es la sensibilidad en intensidad la que puede intervenir en este caso, porque una variación de R_g no modifica sensiblemente la intensidad de la corriente; ahora bien, S_i aumenta proporcionalmente a $\sqrt{R_g}$.

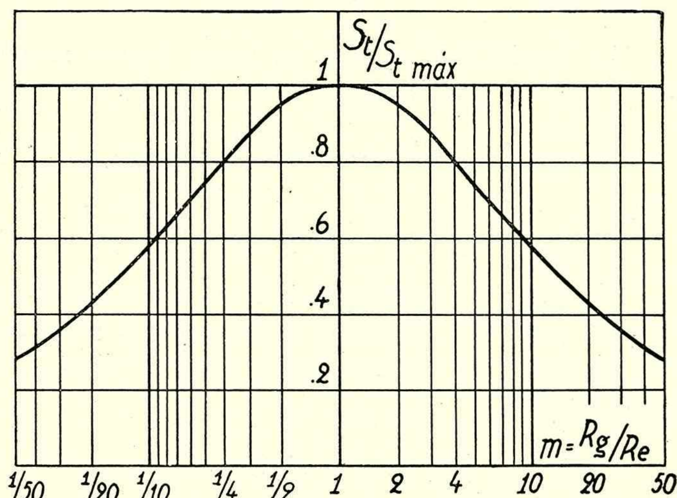


Fig. 7

b) no se dispone de bobinas de recambio. En un galvanómetro de una sola bobina no se podría, sin modificar T_o, hacer variar S_t si R_e está dado; S_t será tanto mayor cuanto menor sea R_e, resultado evidente a priori. En el galvanómetro de *Lord Kelvin* de 4 bobinas se puede, cambiando el acoplamiento, obtener R_g igual a $4\,r_g$, r_g o $\frac{r_g}{4}$; de acuerdo pues con el estudio hecho en el caso a), se conectarán todas las bobinas en serie si $R_e > 2\,r_g$, en serie-paralelo si $\frac{r_g}{2} < R_e < 2\,r_g$ y todas en pa-

ralelo si $R_e < \frac{r_g}{2}$. En el caso de un galvanómetro de dos bobinas, éstas se conectarán en serie o en paralelo según que $R_e > r_g$ o que $R_e < r_g$ respectivamente.

2. *Galvanómetro de cuadro móvil.*

El caso del galvanómetro de cuadro móvil presenta una diferencia esencial con el de imán móvil, porque en él la resistencia del circuito interviene en forma muy sensible en las condiciones de amortiguamiento del aparato. Este hecho modifica los resultados de un razonamiento análogo al que efectuamos a propósito del galvanómetro de imán móvil, y que hasta cierto punto es válido aquí. Supongamos en efecto que se disponga de cuadros intercambiables que tengan todos las mismas dimensiones exteriores y estén construídos con hilos del mismo metal. Despreciemos, para simplificar, el espacio ocupado por la aislación; en este caso se puede escribir $s\,n = k = Cte$ para todos los cuadros.

La resistencia del *cuadro* es

$$r_g = \varrho \frac{n\,l}{s} = \varrho \frac{l}{k} n^2$$

Por otra parte, designando por S la superficie del cuadro

$$\Phi_0 = n\,B\,S = \varepsilon \sqrt{r_g}$$

donde ε es una constante si la inducción B lo es. La sensibilidad en intensidad es

$$S_i = \frac{\Phi_0}{C} = \zeta \sqrt{r_g}$$

y la sensibilidad en tensión se escribe

$$S_t = \frac{S_i}{r_g + R_e} = \frac{\zeta \sqrt{r_g}}{r_g + R_e} = S_{t\,max} \frac{2 \sqrt{m}}{1 + m} \qquad (38a)$$

donde

$$m = \frac{r_g}{R_e} \quad y \quad S_{t\,max} = \frac{\zeta}{2 \sqrt{R_e}} = \frac{S_i}{2\,r_g}$$

Se tiene evidentemente, introduciendo las sensibilidades prácticas

$$S_{\mu v^{-1}\,max} = \frac{S_{\mu A^{-1}}}{2\,r_g}$$

Los resultados son parecidos a los obtenidos en el galvanó-

metro de imán móvil: la máxima sensibilidad práctica en tensión es la mitad de la sensibilidad práctica por microvolt relativa al circuito de resistencia igual a la resistencia r_g *del cuadro*, y se obtiene cuando $R_e = r_g$. Pero los catálogos no indican tal sensibilidad ni aún cuando traen la sensibilidad en tensión relativa al circuito de resistencia igual a la interior del aparato. Eso se debe a que la resistencia de los hilos de suspensión está siempre comprendida en R_g, mientras que aquí la contamos en la resistencia exterior, porque r_g designa la resistencia del cuadro solo. Esta observación es importante en los cuadros de muy pequeña resistencia, la que puede llegar a ser una fracción hasta del orden de 1/20 de la resistencia de los hilos de suspensión, de modo que la realización de la condición $R_e = r_g$ es en este caso imposible. Pero aún suponiendo que la resistencia de los hilos que traen la corriente al aparato sea pequeña frente a r_g, de modo que se pueda cumplir la condición $r_g = R_e$, no hay interés en realizarla porque siendo la resistencia crítica muy superior a $2\,r_g$ el galvanómetro quedaría demasiado amortiguado. Es necesario pues consentir la pérdida del aumento de sensibilidad que procuraba la realización de la condición $R_e = r_g$ y llegar a condiciones de amortiguamiento próximas al amortiguamiento crítico:

$$R_c \cong R_g + R_e, \quad \text{o} \quad R_e \cong R_{ce}$$

Resulta que para poder utilizar el galvanómetro en las mejores condiciones con diversos valores de la resistencia exterior, hay que poder variar R_c. De esta manera se reduce en parte el interés de los cuadros intercambiables, porque se puede modificar R_c sin cambiar de cuadro o de sistema móvil haciendo variar la inducción B en el entrehierro con ayuda de un shunt magnético variable. Otra solución podría consistir en el empleo de electroimanes para crear el campo; se haría variar B actuando sobre la corriente de excitación. Pero este sistema tiene sin embargo múltiples inconvenientes, ya señalados en III 3, y los shunts magnéticos se emplean casi exclusivamente. No obstante, el empleo del shunt solo permite hacer variar B entre límites relativamente restringidos, p ej. de 1 a 3, de manera que si se quiere poder colocar el aparato en condiciones óptimas en circuitos muy diversos, hay que recurrir a cuadros o sistemas móviles de recambio, aunque en número reducido. Una solución elegante consiste en em-

plear un cuadro de dos enrollamientos, ya descripto en III 6, con uno de los enrollamientos muy sensible en tensión y el otro en intensidad. Es fácil ver, en efecto, que las condiciones de realización de sensibilidades elevadas en tensión y en intensidad son contradictorias. La sensibilidad en intensidad se escribe, teniendo en cuenta que

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{K}{C}} \quad \text{y} \quad \alpha_o + \frac{\Phi_o^{\,2}}{2 R_c \sqrt{KC}} = 1$$

$$S_i = \frac{\Phi_o}{C} = \sqrt{\frac{T_o R_c}{\pi C}}\sqrt{1-\alpha_o} = \sqrt{\frac{T_o^{\,3} R_c}{4\pi^3 K}}\sqrt{1-\alpha_o} \qquad (40)$$

según que se elimine K o C. La eliminación no es completa, puesto que hemos conservado $\alpha_o = \dfrac{A_o}{2\sqrt{KC}}$, pero tal manera de proceder no tiene generalmente importancia porque $\sqrt{1-\alpha_o}$ es sólo un término correctivo. Se notará que a igualdad de T_o, R_c y C hay interés en disminuir A_o (o sea α_o) para aumentar S_i, pero el retorno al cero en un circuito de resistencia grande frente a R_c es entonces muy largo, y es generalmente preferible no disminuir demasiado A_o.

La sensibilidad en tensión es, suponiendo que la resistencia del circuito sea igual a R_c

$$S_t = \frac{S_i}{R_c} = \sqrt{\frac{T_o}{\pi C R_c}}\sqrt{1-\alpha_o} = \sqrt{\frac{T_o^{\,3}}{4\pi^3 K R_c}}\sqrt{1-\alpha_o} \qquad (41)$$

Se ve que S_i y S_t varían con R_c en sentido inverso. La alta sensibilidad en intensidad exige la obtención de Φ_o y R_c elevados y por consiguiente un cuadro de gran número de espiras; para limitar el aumento del momento de inercia correspondiente a la multiplicación de las espiras se empleará hilo tan fino como sea posible, lo que contribuye a aumentar todavía más la resistencia del cuadro. La alta sensibilidad en tensión exige la obtención de valores de Φ_o y R_c reducidos y por consiguiente un cuadro de pequeño número de espiras, cuya resistencia será pequeña. Para elevar S_t hay interés en disminuir R_c; ahora bien, $R_c = R_e + R_g$, y siendo fijo el valor de R_e, hay interés en hacer por construcción R_g tan pequeño como sea posible.

Si se realiza la condición $R_c = R_e + R_g$ la sensibilidad prác-

tica en tensión es evidentemente igual a la sensibilidad práctica por microvolt relativa al circuito de resistencia R_c :

$$S\mu_v{}^{-1} = \frac{S\mu_A{}^{-1}}{R_c} = S\mu_V{}^{-1}$$

Supongamos ahora que el galvanómetro no está en las condiciones de amortiguamiento crítico; pongamos $R_c = l\, R_e$, resulta

$$S_t = \frac{S_i}{R_g + R_e} = \sqrt{\frac{T_0}{\pi\, C\, R_c}}\, \sqrt{1 - \alpha_0}\, \frac{l}{1 + \frac{R_g}{R_e}} =$$

$$= \sqrt{\frac{T_0}{\pi\, C\, R_e}}\, \sqrt{1 - \alpha_0}\, \frac{\sqrt{l}}{1 + \frac{R_g}{R_c}}$$

11. Sensibilidad normal. — Al elegir un galvanómetro hay que considerar, además de S_i

1) el período ideal T_0 y el grado de amortiguamiento α, para obtener lecturas rápidas y cómodas (I, 10)

2) la resistencia interior (galvanómetro de imán móvil) o la crítica (galvanómetro de cuadro móvil), que deben ser adecuadas a la resistencia exterior del circuito de medida, de acuerdo con las consideraciones que acabamos de desarrollar,

Se tiene frecuentemente la posibilidad de elegir un aparato entre varios del mismo tipo para emplearlo en un circuito dado. Será generalmente necesario regular la resistencia interior o la crítica para colocarse en las condiciones de $R_g \cong R_e$ (imán móvil) a $R_c \cong R_e$ (cuadro móvil), y por otra parte, si se trata de un galvanómetro de imán móvil, se regulará su período para obtener la rapidez de lectura deseada. Desde luego es lógico y necesario, al comparar los valores (susceptibles de variación) de la sensibilidad S_i de los aparatos en presencia, tomar no los relativos a condiciones cualesquiera de empleo, sino los correspondientes a las mismas condiciones de T_0 , α y R_g o R_c . Se presenta así el problema del conocimiento de la variación de las características del galvanómetro en función de una de ellas que actúa como parámetro, y los catálogos indican generalmente series de valores de $S\mu_A{}^{-1}$ (o S_A), etc , correspondientes a los diversos valores de parámetros tales como R_g o R_c . Se ha llegado a preguntar si no se podrían simplificar estas indicaciones, a veces bastante numerosas; el ideal

sería evidentemente poder juzgar, a partir de una sola cifra, sobre las condiciones de empleo de un aparato en un circuito dado. Tal cosa no es posible; pero se ha ensayado una solución introduciendo la llamada "sensibilidad normal", que vamos a definir y discutir, considerando sucesivamente los casos de los galvanómetros de imán y de cuadro móvil.

1) *Galvanómetro de imán móvil.* Hemos establecido la relación

$$S_i = \frac{M_1 \, \varepsilon \sqrt{a R_g}}{2 \pi^2 K} T_o{}^2 = A T_o{}^2 \sqrt{a R_g} \cong A T_o{}^2 \sqrt{R_g} \qquad (33)$$

admitiendo para simplificar a igual a 1.

A es una constante de construcción del aparato, que no es influenciada ni por la regulación del imán corrector ni por el cambio de las bobinas; sería la sensibilidad de un galvanómetro que tuviese las mismas M_1, ε y K, pero de período ideal y resistencia interior iguales a la unidad. Poco importa si tal galvanómetro es realizable, porque la constante A solo sirve para la clasificación de los aparatos del mismo tipo. Su interés se manifiesta cuando hay que elegir entre varios aparatos del mismo tipo para emplearlos en las mismas condiciones en un mismo circuito: el aparato cuya constante A sea mayor será el más sensible a igualdad de rapidez de lectura, siempre que el valor de a, que interviene además de T_o para fijar la duración de la lectura, sea el mismo para los aparatos en presencia ; esta hipótesis podría no ser cierta y ocasionar diferencias que restan valor a la constante A.

Si se considera la sensibilidad práctica $S_{\mu A^{-1}}$ y se toma como unidad de período ideal 10 s. y como unidad de resistencia interna 1 Ω, resulta, suponiendo siempre $a = 1$

$$S_{\mu A^{-1}} = 2.10^{-3} S_i = 0{,}2 \, A \left(\frac{T_o}{10} \right)^2 R_g{}^{1/2} = S_n \left(\frac{T_o}{10} \right)^2 R_g{}^{1/2} \qquad (42)$$

$S_n = 0{,}2\,A$ se ha llamado "sensibilidad normal" del galvanómetro y se la encuentra en numerosas tablas.

Admitiendo $a = 1$, es decir, despreciando el espesor de la aislación y escribiendo (31)

$$G = \varepsilon \sqrt{R_g}$$

se comete cierto error; algunos autores estiman que se expresa mejor la realidad haciendo

$$G = \varepsilon R_g^{2/5}$$

Con esta hipótesis, la sensibilidad normal se escribe evidentemente

$$S'_n = S\mu A^{-1} \left(\frac{10}{T_o} \right)^2 R_g^{-2/5} \qquad (43)$$

Esta expresión fué propuesta por *Ayrton y Mather*, que le dieron el nombre de "factor de mérito".

Los valores de S_n y S'_n permiten, bajo la reserva de la igualdad de amortiguamiento, una comparación inmediata desde el punto de vista de la mayor sensibilidad en las mismas condiciones de empleo. Pero aún sin conocer S_n se pueden deducir rapidamente a partir de los datos $S\mu A^{-1}$, T_o, R_g y $S\mu V^{-1}$ del catálogo, los valores de $S'\mu V^{-1}$ y $S'\mu A^{-1}$ que se tendrían en las condiciones de empleo establecidas, estando T'_o impuesto por la duración de lecturas que se consiente y R'_g por la resistencia del circuito de medida; basta aplicar

$$\frac{S'\mu A^{-1}}{S\mu A^{-1}} = \left(\frac{T'_o}{T_o} \right)^2 \left(\frac{R'_g}{R_g} \right)^{1/2 \text{ o } 2/5}$$

o

$$\frac{S'\mu V^{-1}}{S\mu V^{-1}} = \frac{S'\mu A^{-1}}{S\mu A^{-1}} \cdot \frac{R_g}{R'_g}$$

Sin embargo el valor de S_n solo no indica absolutamente nada sobre los valores de las magnitudes características R_g, T_o, $S\mu A^{-1}$, $S\mu V^{-1}$, etc, que deben indicarse o calcularse. La magnitud S_n no presenta pues gran interés, y, como veremos, este interés disminuye aún cuando se considera el galvanómetro de cuadro móvil, que, como ya observamos, ha desplazado practicamente al galvanómetro de imán en corriente continua.

Los catálogos indican generalmente series de valores de magnitudes características en función de un parámetro. En el caso del galvanómetro de imán con bobinas de recambio no es necesario indicar los valores de $S\mu A^{-1}$ para cada valor de R_g, porque, no siendo afectado el valor de T_o por el cambio de bobinas, se calcula $S'\mu A^{-1}$ a partir de

$$\frac{S'\mu A^{-1}}{S\mu A^{-1}} = \left(\frac{R'_g}{R_g} \right)^{1/2 \text{ o } 2/5}$$

con una precisión que basta para decidir una elección. Un solo

valor de $S_{\mu A^{-1}}$, relativo a un valor cualquiera de R_g, sería pues suficiente, pero se justifica la indicación de los valores extremos y aún de uno medio, para facilitar la orientación. De cualquier manera, son inútiles las columnas con un número demasiado elevado de valores correspondientes.

2) *Galvanómetro de cuadro móvil.* Se tiene de acuerdo con (40):

$$S_{\mu A^{-1}} = 2.10^{-3}\ S_i = 2.10^{-3}\sqrt{\frac{T_o\ R_c}{\pi\ C}}\ \sqrt{1 - \alpha_o} \tag{44}$$

o también

$$S_{\mu A^{-1}} = 2.10^{-3}\sqrt{\frac{T_o^{\ 3} R_c}{4\ \pi^3\ K}}\ \sqrt{1 - \alpha_o} \tag{45}$$

La regulación usual consiste en hacer variar el campo actuando sobre el shunt magnético, y más raramente, en cambiar el cuadro o la suspensión.

Basándose en las mismas consideraciones vistas más arriba, *Jaeger* define la sensibilidad "normal" S_n despreciando α_o en (44) y haciendo $T_o = 10$ s, y $R_c = 1\ \Omega$; poco importa, evidentemente, si tal galvanómetro es o no realizable. Resulta pues

$$S_n = \frac{2.10^{-3}\sqrt{10}}{\sqrt{\pi\ C}}$$

y

$$S_{\mu A^{-1}} = S_n \left(\frac{T_o}{10}\right)^{1/2} R_c^{\ 1/2}$$

La sensibilidad normal así definida es simplemente $\frac{1}{\sqrt{C}}$ multiplicado por un coeficiente numérico; se puede calcular facilmente el orden de magnitud de su valor máximo observando, como ya lo hemos mencionado, que el valor mínimo usual de C es del orden de $1.10^{-9} - 1.10^{-10}$ *u. G.*, o sea $1.10^{-2} - 1.10^{-3}$ *C. G. S.*

Se habría podido igualmente definir la sensibilidad normal a partir de (45); despreciando α_o y haciendo $T_o = 10$ s. y $R_c = 1\ \Omega$ resultaría

$$S'_n = \frac{10^{-2}\sqrt{10}}{\sqrt{\pi^3\ K}}$$

y

$$S_{\mu A^{-1}} = S'_n \left(\frac{T_o}{10}\right)^{3/2} R_c^{\ 1/2}$$

Con frecuencia es posible llevar un galvanómetro de cuadro provisto de shunt magnético a las condiciones de amortiguamiento crítico, pero no hay regulación continua del período ideal, que solo se puede modificar cambiando de suspensión o cuadro. De manera que cuando hay que elegir entre varios galvanómetros de cuadro para usarlos en un circuito dado, la noción de S_n no presenta ni siquiera el reducido interés que tenía en el caso del galvanómetro de imán móvil.

En el caso de los aparatos de shunt magnético, los catálogos indican frecuentemente la serie de los valores de R_c y $S\mu A^{-1}$ que se corresponden; estos valores están relacionados por la expresión

$$\frac{S'\mu A^{-1}}{S\mu A^{-1}} = \left(\frac{R'_c}{R_c} \right)^{1/2}$$

porque la regulación no afecta ni T_o ni α_o. En rigor bastaría con indicar los límites de variación de R_c y el valor de $S\mu A^{-1}$ correspondiente a uno de ellos; para mayor comodidad se indican los pares extremos de valores de $S\mu A^{-1}$ y R_c, y un valor intermedio; la multiplicación de valores intermedios es inútil.

La introducción de la sensibilidad "normal" (o del "factor de mérito"), ya sin gran interés cuando se trata de una serie de aparatos del mismo principio, puede dar lugar a confusiones si se aplica a la comparación de aparatos de distinto principio. En la definición de S_n del galvanómetro de imán figura la resistencia interior del aparato R_g, y en la del galvanómetro de cuadro figura la del circuito. Al elegir $R_g = 1\,\Omega$, si se considera el galvanómetro de imán en las condiciones de máxima sensibilidad en tensión, la resistencia del circuito es igual a $2\,\Omega$, de modo que, para comparar los aparatos de imán y de cuadro hubiera sido mejor, como lo observó *White*, elegir $R_c = 2\,\Omega$ en la definición de S_n de los galvanómetros de cuadro.

En el catálogo de la casa "Cambridge" encontramos que los "factores de mérito" de los galvanómetros de cuadro móvil están comprendidos entre 25 y 2500, los de los galvanómetros de imán móvil están entre 1000 y 15000, y los de los galvanómetros de cuerda están entre 20000 y 150000. Estas últimas cifras son muy elevadas a causa del corto período del aparato, pero el galvanómetro de cuerda es menos sensible en intensidad que los anteriores; su campo de aplicación no es el mismo Por lo tanto, no se

debe sacar ninguna conclusión de la cifra de la sensibilidad normal indicada aisladamente, y hay que recordar que no deben compararse más que las cifras relativas a los aparatos del mismo tipo, susceptibles de ser colocados en condiciones idénticas. Practicamente el interés de la "sensibilidad normal" desapareció junto con el empleo de los aparatos de imán en corriente continua.

12. Sensibilidad en cantidad de electricidad y en flujo. — Ver el capítulo V: "Galvanómetro balístico".

13. Estudio de la variación de la desviación del galvanómetro por medio de resistencias - Shunt. Resistencias adicionales. — Ocurre frecuentemente que la corriente que atravesaría un aparato intercalado directamente en un circuito sería demasiado grande, y hay que limitarla agregando una resistencia conveniente en serie o en paralelo con el galvanómetro, o aún ambas a la vez. Generalmente la reducción de la corriente en el galvanómetro no es el único fin perseguido, ni a veces el principal. Según el caso, se agrega la condición de mantener constante sea la corriente total en el circuito, sea la resistencia del circuito vista del galvanómetro, de la que dependen las condiciones de amortiguamiento, sea ambas condiciones a la vez. Una resistencia puesta en paralelo con el galvanómetro toma el nombre de shunt. Sea (fig. 8) i_g la corriente indicada por el galvanómetro de resistencia interior R_g shuntado por una resistencia R_s; la corriente total es

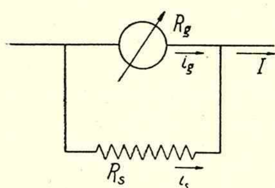


Fig. 8

$$I = i_g \frac{R_g + R_s}{R_s} = m\, i_g \tag{46}$$

El factor

$$m = \frac{R_g + R_s}{R_s} \tag{47}$$

se llama "poder multiplicador del shunt"; es la cantidad por la que hay que multiplicar la corriente indicada por el galvanómetro para obtener la corriente total.

En principio, cualquier caja de resistencias puede emplearse como shunt, pero entonces se tiene casi siempre un valor de m fraccionario, poco cómodo para los cálculos rápidos; de manera que muchas veces es preferible emplear shunts construídos especialmente para cada galvanómetro. Se dan a m valores simples,

p. ej. 2, 5, 10, 100, 1000. Con frecuencia (fig. 9) la caja del shunt tiene indicado en los bornes, no el valor de m, sino la relación $\frac{R_s}{R_g}$, o sea respectivamente 1/1 (m = 2), 1/9 (m = 10), 1/99 (m = 100), 1/999 (m = 1000). La calibración no es en general muy precisa, de manera que en toda medida exacta hay que determinar previamente m por un ensayo especial. Hay que fijarse especialmente en la influencia de la temperatura, ya que su coeficiente puede no ser el mismo para el galvanómetro y para el shunt

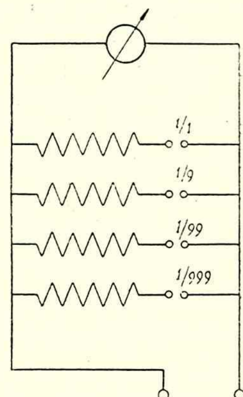


Fig. 9

La relación (46)

$$i_g = \frac{I}{m}$$

muestra que la corriente en el galvanómetro solo es reducida m veces por el shunt cuando la corriente total I permanece constante. Abstracción hecha del caso en que se regula $I = Cte$, se estará en esas condiciones al medir la corriente a través de una resistencia muy grande (aislación). Este caso no es más que un caso límite del circuito de la fig. 5 en el que actúa la fem E constante. La corriente en el galvanómetro es $i'_g = \frac{E}{R_e + R_g}$ antes y $i''_g = \frac{E}{m\, R_e + R_g}$ después de agregar el shunt. La acción de éste es pues tanto más pequeña cuanto menor es R_e frente a R_g ; en particular para los pequeños valores de R_e el valor de R_s tendría que ser muy reducido, lo que es un inconveniente en algunos casos, porque dejan de ser despreciables las resistencias de conexión y de contacto y aumenta el gasto de la fuente. Es fácil remediar tal estado de cosas agregando en serie con R_e, y para cada valor de R_s una resistencia llamada "de compensación", elegida en forma de mantener constante la resistencia total vista desde la fuente, y por consiguiente la corriente total. Al introducir el shunt la resistencia del galvanómetro R_g debe ser reemplazada por la $\frac{R_g\, R_s}{R_g + R_s} = \frac{R_g}{m}$ del conjunto galvanómetro-shunt, de modo que la resistencia de compensación ha de ser $R_g\,(1 - \frac{1}{m})$. Se han construído cajas de shunt con las correspon-

dientes resistencias de compensación (fig. 10): colocando la ficha en a se pone el galvanómetro solo en el circuito; colocando las fichas en $b - b$ el galvanómetro queda shuntado por R'_s y el conjunto shunt-galvanómetro queda en serie con la resistencia de compensación R'_c, y así sucesivamente. Finalmente, colocando la ficha en e se pone el galvanómetro en corto-circuito y se introduce la resistencia $R'_c + R''_c + R'''_c + R^{IV}_c$, que puede hacerse igual a R_g por una elección conveniente de R^{IV}_c (*Armagnat*).

El empleo del shunt modifica no solamente la resistencia del circuito visto desde la fuente, sino también la resistencia R_e circuito visto del galvanómetro, la que se transforma en $\frac{R_e \cdot R_s}{R_e + R_s}$. Las condiciones de amortiguamiento cambian, y hay que asegurarse de que esta modificación del amortiguamiento se puede aceptar. En particular, notemos desde ya que si el aparato trabaja como balístico, la sensibilidad en cantidad de electricidad se ve afectada por toda variación del grado de amortiguamiento (V,2).

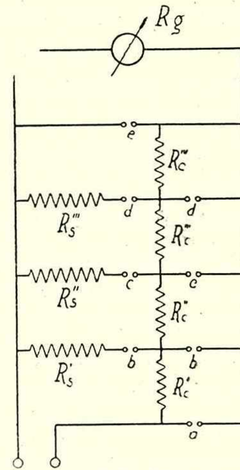


Fig. 10

Si la resistencia del shunt es superior a la primitiva exterior, $R_s > R_e$, se puede, agregando en serie con R_e una resistencia $R' = \frac{R_e^2}{R_s - R_e}$, mantener constante la resistencia del circuito visto del galvanómetro, y conservar así las mismas condiciones de amortiguamiento en los dos casos. Si $R_s < R_e$ el galvanómetro está forzosamente más amortiguado que sin shunt, y para restablecer las condiciones primitivas es necesario agregar una resistencia $R = \frac{R_e^2}{R_e + R_s}$, en serie con el galvanómetro, disponiéndose el shunt en los bornes del conjunto formado por la resistencia R y el galvanómetro; el valor de m ya no está dado por (47) sino por (48). Finalmente es posible, poniendo dos resistencias R y R' (fig. 11), mantener constante para cualquier valor de m la resistencia total del circuito vista tanto del galvanómetro como de la

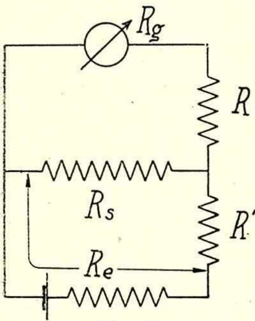


Fig. 11

fuente. Las condiciones que deben cumplirse son evidentemente

$$\frac{R_g + R + R_s}{R_s} = m \qquad (48)$$

$$R + \frac{R_s\,(R' + R_e)}{R_s + R' + R_e} = R_e \qquad (49)$$

$$R' + \frac{R_s\,(R_g + R)}{R_s + R_g + R} = R_g \qquad (50)$$

relaciones que determinan R, R' y R_s, una vez fijados m, R_g y R_e. *Volkmann* ha construído shunts basados en este principio, que se emplean con un galvanómetro dado y en condiciones determinadas.

14. Shunt universal o de Ayrton. — Cuando la resistencia exterior del circuito es muy grande, se pueden obtener a la vez, mediante un dispositivo sencillo, la constancia de la corriente total y del amortiguamiento, cualquiera que sea el valor del poder multiplicador. Coloquemos en los bornes del galvanómetro una resistencia r con cierto número de tomas intermedias $^1/_1$, $^1/_2$, ... $^1/_n$, ... (fig. 12), expresando así que la resistencia del shunt comprendida entre el borne extremo A, común al galvanómetro, shunt y resistencia exterior, y un borne $^1/_n$ es igual a $\frac{r}{n}$. Supongamos el cursor sobre la toma $^1/_n$; haciendo $R_s = \frac{r}{n}$ y

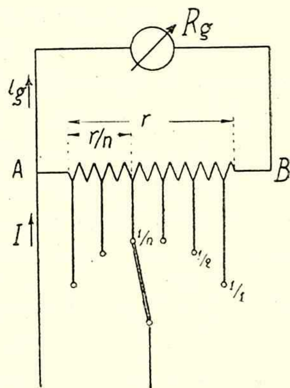


Fig. 12

$R = r\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ en (48), se tiene

$$m_n = \frac{R_g + r}{r}\,n \qquad (51)$$

Para un galvanómetro dado, $\frac{R_g + r}{r}$ es una constante independiente de n, de manera que la relación entre los poderes multiplicadores correspondientes a dos valores cualquiera n' y n'' de n, que se llama poder multiplicador relativo

$$\frac{m_n{}'}{m_n{}''} = \frac{n'}{n''}$$

es independiente de R_g, o sea, es el mismo para cualquier galvanómetro; por esta razón la resistencia r recibe el nombre de shunt universal. La caja de shunt tiene indicado al lado de cada borne el valor de n o el de $\frac{1}{n}$, siendo n el poder multiplicador relativo, referido al valor mínimo de m, o sea a $m_1 = \frac{R_g + r}{r}$, es decir

$$n = \frac{m_n}{m_1} \tag{52}$$

Para saber el valor del poder multiplicador efectivo que corresponde a cada borne, es evidentemente necesario conocer R_g y r, pero si R_g es pequeño frente a r se puede hacer $m_1 = 1$ y $m_n = n$.

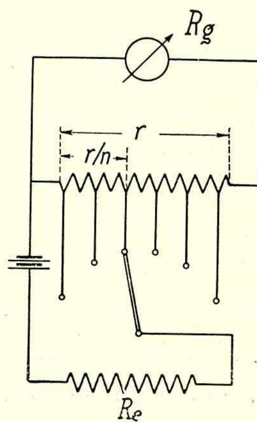


Fig. 13

Si la resistencia exterior al galvanómetro es muy grande, la resistencia total del circuito visto desde la fuente (fig. 13)

$$R_e + \frac{r}{(R_g + r)\,n}\left\{R_g + r\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right\} \cong R_e$$

es practicamente independiente de n, lo mismo que la resistencia total vista desde el galvanómetro

$$R_g + r\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{r\,R_e}{r + n\,R_e} \cong R_g + r$$

de manera que el amortiguamiento es constante; en particular se puede elegir r para obtener el amortiguamiento crítico.

La aplicación del shunt universal es pues interesante p. ej en una medida de aislación, o en una descarga capacitiva en el galvanómetro balístico (véase el capítulo V), casos en los que la resistencia exterior puede considerarse practicamente infinita. En cambio, si la resistencia exterior es pequeña, resulta inmediatamente de las consideraciones que preceden que el empleo del shunt universal ya no ofrece interés particular.

15. Límite natural de la sensibilidad. — *Ising* fué el primero en demostrar, basándose en las experiencias de *Moll*, que los galvanómetros tienen un límite natural de sensibilidad. En efecto, el sistema móvil de un galvanómetro participa en el movimiento browniano del aire; el par ejercido por el choque de las moléculas del aire origina una oscilación de amplitud variable, de acuerdo con las leyes de probabilidad. La desviación media, tomada en un intervalo de tiempo suficiente, es evidentemente nula, pero si el galvanómetro es muy sensible, las desviaciones instantáneas alteran el cero, y no será posible medir una corriente lo suficientemente pequeña como para que la desviación que le corresponde sea del mismo orden de magnitud que las desviaciones instantáneas.

El movimiento de las moléculas del aire no es la única causa de la inestabilidad natural del cero; hay que considerar también el movimiento browniano de los electrones del circuito del galvanómetro, o sea una corriente espontánea fluctuante de valor medio nulo en un intervalo de tiempo suficientemente grande, pero que en un instante dado puede ser del mismo orden de magnitud que la corriente que se quiere medir.

Consideremos un sistema en equilibrio estadístico con el medio que lo rodea. La acción del medio origina en las energías potencial y cinética del sistema fluctuaciones cuyo valor medio es $\frac{1}{2} k \theta$ por grado de libertad, siendo $k = 1{,}37.10^{-23}$ *u. G.* o $1{,}37.10^{-16}$ *C. G. S.* la constante de Boltzmann y θ la temperatura absoluta. Se tiene pues, para los galvanómetros

$$\frac{1}{2} k \theta = \frac{1}{2} C \overline{\Theta}_o{}^2 \qquad (53)$$

donde $\overline{\Theta}_o{}^2$ es el cuadrado medio de las desviaciones angulares debidas a las fluctuaciones. La corriente I_o que provocaría una desviación $\overline{\Theta}_o$ es

$$I_o = \frac{C\overline{\Theta}_o}{g} = \frac{\sqrt{K C \theta}}{g} = \sqrt{\frac{\pi K \theta}{R_c T_o}} \qquad (54)$$

si eliminamos g despreciando el amortiguamiento en circuito abierto.

La probabilidad de que una desviación única Θ_1 sea debida a la experiencia y no a las fluctuaciones es de 0,84 para $\Theta_1 = \overline{\Theta}_o$

y de 0,9999 para $\Theta_1 = 2,75\ \overline{\Theta}_0$ (*Courtines*). Repitiendo n veces la lectura se reduce $\sqrt{n}$ veces $\frac{\Theta_1}{\overline{\Theta}_0}$. La corriente I_0 representa pues, a menos de un coeficiente de seguridad, la corriente límite que se puede medir.

Zernike calculó la distancia mínima a la que hay que colocar la escala del espejo de un galvanómetro dado, para poder observar la oscilación del spot debida al movimiento browniano. Se tiene en efecto, a partir de (18) y (54):

$$\overline{d}_{mm} = 10^3 .\ 2\ D \sqrt{\frac{K\ \theta}{C}} \qquad (55)$$

con $\overline{d}_{mm}$ igual a la raíz cuadrada del cuadrado medio de las desviaciones. A la temperatura normal de laboratorio, 18° C, o sea $\theta = 291°$ K, se tiene

$$\overline{d}_{mm} = 12{,}6 . 10^{-8} \frac{D}{\sqrt{C}} \qquad (56)$$

Estas deduciones se verificaron experimentalmente. Con un galvanómetro de cuadro muy sensible, de constante de torsión $C = 3 .\ 10^{-10}$ *u. G.*, cuyas desviaciones eran amplificadas por reflexiones sucesivas, *Zernike* obtuvo desviaciones desordenadas del orden de 0.3 mm. de uno y otro lado de la posición de equilibrio. Encontró también que para un galvanómetro de imán móvil muy sensible (par director 4.10^{-13} *u. G.*), $\overline{d} = 0{,}2$ mm. si $D = 1$ m., de modo que las fluctuaciones son ya visibles distando la regla solamente 0,35 m. del espejo. Esto explica en parte por qué ni los mejores soportes ni la mejor protección pueden hacer perfectamente estable el cero de los galvanómetros de imán muy sensibles; antes eso se atribuía a los microsismos, pero ahora se tiene la certeza de que interviene también la inestabilidad natural del cero. Si los galvanómetros de cuadro móvil parecen más estables, es porque el estado actual de su construcción no permite generalmente alcanzar la sensibilidad suficiente.

El movimiento browniano limita la sensibilidad práctica máxima en intensidad al orden de 10^{-11} — 10^{-12} m.A/mm., lo que no quiere decir que no se pueda, empleando amplificadores de corriente con válvulas electrómetros, medir con galvanómetros co-

rrientes mucho más pequeñas; *Moles, Rogozinski* y otros indican dispositivos, algunos muy sencillos, que permiten acusar hasta 10^{-17} A. Observemos de paso que la amplificación por válvulas queda limitada por los fenómenos de granalla y de agitación térmica.

16. Amplificación de las desviaciones por relés termo- o fotoeléctricos. — Lo que interesa fundamentalmente en un galvanómetro es la menor desviación que se puede leer con *certeza,* y que depende no solamente de la sensibilidad del aparato, sino también de las perturbaciones que afectan el equilibrio del órgano móvil. Ciertas perturbaciones, si son regulares, pueden ser individualizadas; basta observar el cero del aparato durante un tiempo suficiente. El período propio T y el amortiguamiento del aparato desempeñan aquí un papel importante: si el período es grande el aparato es un integrador; por el contrario, si es pequeño, se pueden aislar ciertas perturbaciones de corta duración y tenerlas en cuenta.

Cuando, como ocurre en los galvanómetros de cuadro móvil, la sensibilidad, aunque muy elevada, es inferior a la natural, y el cero del aparato es suficientemente estable, se puede, aplicando un procedimiento de amplificación de las desviaciones, alcanzar la sensibilidad natural. Ya hemos descripto en el parágrafo 3 de este capítulo la amplificación óptica de las desviaciones; vamos a describir ahora otros procedimientos, utilizando un relé formado sea por un par termoeléctrico, sea por una célula fotoeléctrica.

1) *Amplificador con relé termoeléctrico. Moll* y *Burger* realizaron un amplificador, construído por la casa Kipp, que consiste en dos galvanómetros y un par termoeléctrico formado por una banda constantano - manganino - constantano, colocado en una ampolla en la que se ha hecho el vacío para evitar las perturbaciones ocasionadas por el aire. El galvanómetro primario *G. P.*, muy sensible, y cuya desviación se quiere medir, está dispuesto de tal manera que cuando está en el cero, el rayo luminoso reflejado por su espejo cae en el centro de la banda de manganino $A\,B$ (fig. 14): los dos extremos de la soldadura están entonces a la misma temperatura y el galvanómetro secundario, *G. S.*, sobre el que está cerrado el par, queda en reposo.

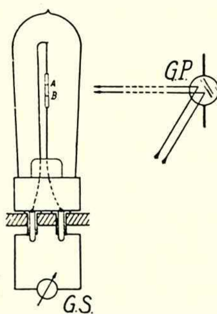


Fig. 14

Pero basta una pequeñísima desviación del galvanómetro primario, inapreciable sobre la escala usual a 1 m., para calentar desigualmente las soldaduras y obtener una desviación notable del galvanómetro secundario, que puede ser menos sensible que el primario. La sensibilidad del termorelé se regula obrando sobre la intensidad luminosa de la lámpara del galvanómetro primario, haciendo variar la corriente de alimentación de la misma por medio de un reóstato. Las desviaciones de los dos galvanómetros son proporcionales (amplificación lineal) si el desplazamiento del spot sobre el par es inferior a 1,5 mm. El tiempo de indicación del termorelé es de alrededor de 2,5 s. La misma casa puso a punto otro dispositivo de amplificador termoeléctrico para usar con un galvanómetro de período muy corto cuando se precisan lecturas rápidas. El haz luminoso (fig. 15) reflejado por el espejo del galvanómetro primario cae sobre dos prismas de reflexión total, que lo dividen en dos partes, concentrada cada una sobre un par termoeléctrico en el vacío, de indicaciones rápidas. Los pares están conectados en oposición ; eligiendo un galvanómetro conveniente el tiempo de lectura es de alrededor de 0,3 s., según el constructor, pudiéndose alcanzar la sensibilidad natural.

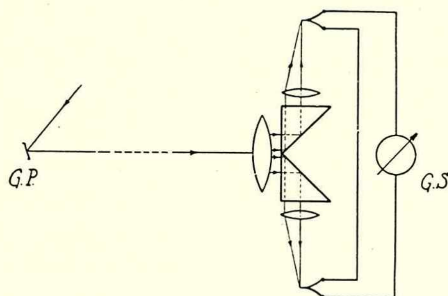


Fig. 15

2) *Amplificador con relé fotoeléctrico.* Se puede también obtener una amplificación lineal de las desviaciones con ayuda de una célula fotoeléctrica (*Null*). El dipositivo es análogo al del par termoeléctrico: el espejo del galvanómetro primario envía la luz sobre una célula frente a la cual está colocada una pantalla con una abertura triangular (fig. 16). La célula está cerrada sobre el galvanómetro secundario. Una rotación del espejo del galvanómetro primario provoca una variación del flujo luminoso recibido por la célula, y, por consiguiente, una variación de la corriente secundaria. La amplificación puede regularse obrando sobre la intensidad luminosa de la lámpara y sobre la abertura del triángulo. La célula tiene sobre el par la ventaja de no ser practicamente sensible a la falta de uniformidad en la distribución de la tempera-

tura y a las pequeñas variaciones de la misma. Por el contrario, si se quieren medir con la célula desviaciones del aparato en los dos sentidos, es necesario admitir que el galvanómetro secundario esté recorrido por una corriente permanente cuando el galvanómetro primario está en cero; por lo tanto, la suspensión del galvanómetro secundario debe estar completamente exenta de histéresis elástica. Es evidente que la superficie útil de la célula debe tener la misma sensibilidad a la acción del haz luminoso.

Cualquiera que sea el relé empleado (par o célula), el flujo luminoso de la fuente debe ser muy constante; para eso se alimentan generalmente las lámparas bajo tensión reducida.

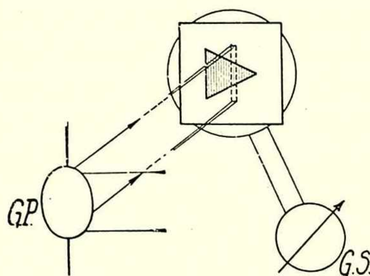


Fig. 16

Una condición previa a la amplificación de las desviaciones es que el aparato primario tenga un cero suficientemente estable; a ese efecto *Moll*, en lugar de suspender el cuadro, lo mantiene en posición por medio de cintas en tensión (III 5): este aparato es particularmente interesante como galvanómetro primario para utilizar con el relé termoeléctrico.

Observemos también que se puede modificar, y en particular amplificar la desviación de un galvanómetro único, acoplándole un relé, p. ej. una célula fotoeléctrica. Se puede trabajar con una sola fuente luminosa, colocando la célula atrás de una escala transparente, pero es más cómodo utilizar dos fuentes, una que da un spot normal sobre la escala y la otra que ilumina la célula por reflexión sobre el espejo del galvanómetro. El spot que se forma sobre la célula puede tener la forma de una hendidura horizontal; se le intercepta en parte por una pantalla de borde vertical colocada delante de la célula (*Hochard*).

La célula y el circuito de medida propiamente dicho están dispuestos en paralelo en los bornes del galvanómetro. Supongamos abierto el circuito de medida; bajo la influencia de la corriente $I_c = f(\Theta)$ enviada por la célula, el espejo toma una cierta posición de equilibrio Θ_1 tal que

$$C\,\Theta_1 = g\,f(\Theta_1)$$

Al cerrar el circuito de medida pasa una nueva corriente I por el

galvanómetro y la desviación varía, modificándose la iluminación de la célula y también la corriente I_c qne ésta envía al aparato. Sea Θ_2 la nueva posición de equilibrio; se tiene

$$C\,\Theta_2 = g\,[\,I + f\,(\,\Theta_2\,)\,]$$

Si en primera aproximación admitimos $f(\Theta) = a\,\Theta$, se deduce inmediatamente

$$(\Theta_2 - \Theta_1)\,(\,C - g\,a\,) = g\,I \qquad (57)$$

Todo ocurre como si el par de torsión fuese $C - ga$ en lugar de C. Se puede regular facilmente $f\,(\Theta)$ actuando sobre el brillo y la forma del spot que ilumina la célula, obteniéndose diversas leyes de $\Theta\,(I)$. En particular, *Y. Le Grand* indica un dispositivo registrador donde la corriente I_c que envía la célula es de signo contrario al de la corriente a medir con el fin de obtener desviaciones proporcionales al logaritmo de la corriente.

El estudio completo de las fluctuaciones del sistema galvanómetro primario - relé - galvanómetro secundario es más complejo (*Courtines, Hochard*). El tiempo total de lectura depende de los galvanómetros elegidos y del relé. En general, el aumento de sensibilidad producido por el relé está siempre acompañado por un aumento de la duración de las lecturas.

Agreguemos finalmente que cuando se utilizan los galvanómetros en las proximidades de su límite natural de sensibilidad, se pueden obtener los mejores resultados por el procedimiento fotográfico. Se fotografía primero el cero del aparato, que a causa del movimiento browniano será una mancha de centro más oscuro que los bordes; se hace una segunda fotografía con la misma placa, después de enviar al galvanómetro la pequeña corriente a determinar, y finalmente se mide, con ayuda de un microfotómetro, la distancia entre los máximos de las dos manchas. En general, para hacer medidas exactas con galvanómetros muy sensibles, se prefiere el registro fotográfico a la observación.

17. Dispositivos antivibratorios. — Ya hemos insistido sobre la importancia de la estabilidad del cero. Por construcción se trata de obtener que el órgano móvil participe lo menos posible en el movimiento del galvanómetro, haciendo coincidir tan perfectamente como se pueda el eje principal de inercia del órgano móvil con el hilo de suspensión. Pero cuando se quiere evitar toda vibración es a veces necesaria una instalación especial del galvanómetro.

Si colocando el aparato sobre una simple consola mural el ce-

ro no es suficientemente fijo, se puede ensayar la interposición entre la consola y el galvanómetro de un bloque muy pesado que descansa sobre un disco elástico, p. ej. un fieltro de crin de caballo. Pueden interponerse también arandelas de caucho comprimidas a un tercio de su altura inicial.

Se obtienen a veces buenos resultados instalando el aparato sobre una columna (p. ej. un tubo de acero de 10 cm. de diámetro exterior), solidamente fija a las vigas de hierro del piso, en la vecindad de sus empotramientos.

Si por los medios que se acaban de citar no se obtienen buenos resultados, se puede ensayar una suspensión antivibratoria. La suspensión *Julius* (fig. 17) consiste en tres varillas *t* dispuestas en los vértices de un triángulo equilátero, rigidamente mantenidas por dos bases triangulares *b*, *b*. Cada varilla tiene un contrapeso regulable *C* y un dispositivo de unión *a*; tres hilos de acero *f*, tan idénticos como sea posible, de 1,5 a 3 m. de longitud, y cuya sección no debe ser muy pequeña, sino justo suficiente para que el peso del dispositivo mantenga tensos los hilos, reunen los dipositivos de unión a los vértices de una consola triangular fija en el muro o en el techo. Se regula la posición de los contrapesos de manera que el centro de gravedad del sistema esté en el plano horizontal que contiene los puntos de unión, *a*. Para amortiguar las vibraciones, las varillas tienen aletas sumergidas en recipientes *A* que contienen un líquido viscoso. El amortiguamiento no debe ser demasiado enérgico para no transmitir las vibraciones en sentido inverso, del edificio al aparato. El galvanómetro *G* se coloca sobre un soporte triangular *s*, semejante a las bases, y cuya altura se puede regular, para llevar al plano de las uniones el punto del aparato que se quiere protejer mejor, generalmente el punto de suspensión del sistema móvil. Debe preverse un dispositivo de seguridad

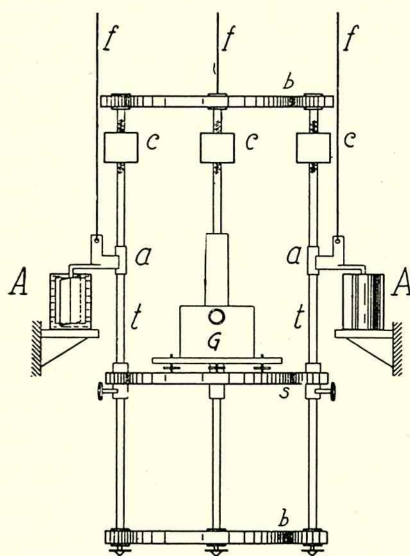


Fig. 17

para protejer el galvanómetro de la caída que podría ser provocada por la ruptura de un hilo. Es necesario también evitar que las corrientes de aire y las conexiones que vienen al galvanómetro sean una fuente de perturbaciones.

En muchos casos puede ser suficiente una suspensión más simple, como p. ej. la siguiente: una consola *C*, en forma de triángulo equilátero, sostiene, por medio de tres hilos *f*, dispuestos en los vértices del triángulo, una fuerte placa de madera *P*, cargada con plomo, que sirve de soporte al galvanómetro (fig. 18). La placa tiene aletas sumergidas en un baño de aceite contenido en el recipiente *R* soportado por dos consolas *c*; el amortiguamiento así obtenido es excelente. Los hilos son de acero de 0,5 mm. de diámetro tienen una longitud total de cerca de 2 m.; se ajustan con ayuda de pequeños tensores *T* que consisten en dos ganchos reunidos por un cilindro que permite hacer variar ligeramente la longitud sin torcer el hilo.

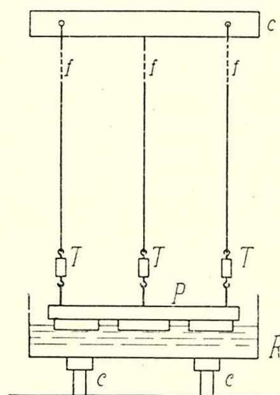


Fig. 18

Bestelmeyer indicó una suspensión portátil que se coloca sobre una mesa, donde los hilos son reemplazados por bastoncitos elásticos. Este dispositivo ha sido construído por la casa Hartmann y Braun.

Einthoven utilizó una placa de hierro de 1 m. x 1 m. x 0,011 m. que flota en un recipiente sobre una capa de mercurio de 1 mm. de espesor. El galvanómetro está colocado sobre la placa. *White* modificó el dispositivo utilizando dos recipientes; el aparato está fijado a las placas flotantes de modo que el punto de suspensión del órgano móvil se encuentre en el centro de gravedad del sistema flotante. *Brace* empleó en vez de mercurio aceite pesado, más barato y cuya viscosidad permite un buen amortiguamiento. Estos dispositivos tienen serios inconvenientes debido a la excesiva superficie ocupada.

18. Comparación rápida de las ventajas e inconvenientes de los galvanómetros de cuadro y de imán móvil en corriente continua. — Una característica de los galvanómetros de imán móvil es la facilidad relativa con que permiten alcanzar muy altas sensibilidades en intensidad y tensión, que llegan, sin amplificación de las desviaciones y para distancias corrientes de la regla al espejo,

a los límites naturales de la sensibilidad. Pero eso no es una ventaja porque una sensibilidad tan elevada solo se precisa excepcionalmente y en el caso en que fuera necesaria se puede obtener con el galvanómetro de cuadro agregándole un amplificador de desviaciones. Recordemos también que la casa Leeds - Northrup construye un aparato de cuadro, del que ya hablamos, cuya sensibilidad en intensidad es del mismo orden que la de los galvanómetros de imán más sensibles.

Una ventaja del galvanómetro de imán es la facilidad con que se pueden cambiar las bobinas para colocarse en las mejores condiciones de sensibilidad en tensión; pero la regulación de los galvanómetros de cuadro con shunt magnético es igualmente fácil, y el cambio del sistema móvil, cuando es el sistema entero el que se saca, es inmediato.

El amortiguamiento de los galvanómetros de imán es en general practicamente independiente de la resistencia del circuito, lo que permite emplearlos en circuitos de resistencia muy pequeña, hecho más difícil de realizar con el galvanómetro de cuadro móvil.

Observemos también que el circuito interior del galvanómetro de imán puede hacerse con facilidad totalmente de cobre, lo que elimina los efectos termoeléctricos.

Como el aparato de imán no tiene partes móviles conductoras de la corriente, resiste mejor a las sobrecargas, aunque esta ventaja no es completa, porque si bien una sobreintensidad deteriora el circuito menos facilmente, puede modificar las características de los imanes. Este efecto se produce aún para sobrecargas de duración lo suficientemente pequeña como para que el efecto Joule no sea peligroso, lo que, como veremos oportunamente, limita el interés del aparato como balístico.

El período del galvanómetro de imán móvil presenta la ventaja de regularse facilmente; pero su valor es generalmente elevado.

Los principales inconvenientes del galvanómetro de imán son su influenciabilidad por los campos magnéticos parásitos y su dificultad de manejo. La regulación, por cierto bastante delicada, debe controlarse después de cada transporte; los campos magnéticos parásitos intensos pueden alterar las características de los imanes: la calibración debe ser frecuente. El cero del aparato no es suficientemente estable a pesar de los artificios empleados. La proporcionalidad entre las desviaciones y las corrientes es menos buena que en

los galvanómetros de cuadro. Observemos finalmente que el precio de los aparatos de imán es elevado, superior al de los galvanómetros de cuadro móvil, quienes, en el momento actual, los han desplazado completamente de su empleo en corriente continua en los laboratorios.

Pero no hay que deducir de esto que el estudio de los galvanómetros de imán presenta interés solo a título excepcional, o aún puramente histórico, porque si bien han sido eliminados en corriente continua, se emplean, convenientemente construídos, en corriente alterna, como galvanómetros de resonancia particularmente interesantes. Este resultado podría entreverse a priori, porque los galvanómetros de resonancia exigen un fuerte par director como consecuencia del pequeño período propio, y en esas condiciones se atenúan la fragilidad mecánica y la influenciabilidad por los campos exteriores de frecuencia distinta de la resonancia.

El lector encontrará en el capítulo X las características más interesantes (T_o, S_i, R_g, R_c, etc.) de diferentes galvanómetros construídos por las principales fábricas.

Nota anexa: Galvanómetro diferencial.

19. Generalidades. — Estos aparatos, que fueron muy utilizados hace algunas decenas de años, particularmente en Alemania, se emplean raramente hoy en día. Tienen dos órganos motores, recorridos por las corrientes a comparar en tal sentido que los pares producidos se restan. Si el aparato fuese perfectamente simétrico quedaría en el cero cuando se comparan dos corrientes de intensidades iguales; en realidad eso no ocurre.

En general, todo galvanómetro, cualquiera que sea el principio de su funcionamiento, puede construirse como galvanómetro diferencial; pero se han utilizado sobre todo los galvanómetros de imán o de cuadro móvil. En el capítulo IX diremos algunas palabras sobre el principio de los dispositivos diferenciales termoeléctricos, que tienen algunas aplicaciones.

20. Galvanómetro diferencial de imán móvil. — Consideremos p. ej. el galvanómetro astático de *Lord Kelvin*. Normalmente, sus bobinas superiores e inferiores están atravesadas en sentido opuesto por la misma corriente. Enviemos ahora al aparato dos corrientes distintas I_1 e I_2 que circulan en el mismo sentido en las bobinas superiores e inferiores respectivamente: los pares debidos a I_1 e I_2 se restan; el aparato se ha convertido en un galvanómetro diferencial.

La ecuación de equilibrio se escribe (ver **II, 6**)

$$M_1 G_1 I_1 \cos \Theta + M_2 G_2 I_2 \cos (\gamma + \Theta) = M_r H_t \operatorname{sen} \Theta$$

de donde resulta

$$tg\ \Theta = \frac{M_1 G_1 I_1 + M_2 G_2 I_2 \cos \gamma}{M_r H_t + M_2 G_2 I_2 \operatorname{sen} \gamma}$$

En un aparato perfecto se tendría $M_1 = M_2 = M$, $G_1 = G_2 = G$ $\gamma = \pi$ y

$$tg\ \Theta = \frac{M G}{M_r H_t} (I_1 - I_2) \tag{58}$$

La desviación mediría la diferencia de las dos corrientes, lo que justifica el nombre de diferencial dado al aparato.

En realidad, el aparato está en cero cuando

$$M_1 G_1 I_1 + M_2 G_2 I_2 \cos \gamma = 0$$

de donde

$$\frac{I_1}{I_2} = K = - \frac{M_2 G_2 \cos \gamma}{M_1 G_1} \tag{59}$$

El valor de K, que interviene en las medidas hechas con el aparato, debe determinarse experimentalmente para cada galvanómetro.

Para obtener una simetría mejor, se efectúan los enrollamientos de las bobinas con dos hilos paralelos, perfectamente aislados entre sí, dispuestos uno al lado del otro, que constituyen dos circuitos que ejercen acciones sensiblemente idénticas sobre el sistema de imanes. Hay siempre una pequeña diferencia entre las sensibilidades en intensidad de los dos sistemas, que se puede suprimir con ayuda de una bobina de compensación de posición regulable, que penetra en el canal interior de una de las bobinas. Es conveniente verificar la regulación antes de cada ensayo. Se puede también compensar la sensibilidad en tensión S_t al mismo tiempo que S_i; basta para esto hacer iguales las resistencias de ambas bobinas. Se obtiene este resultado colocando una resistencia convenientemente elegida en serie con la bobina menos resisten-

te; esta resistencia puede en algunos casos estar constituída, por lo menos en parte, por la bobina de compensación.

21. Galvanómetro diferencial de cuadro móvil. — Se construye facilmente un galvanómetro diferencial de cuadro móvil, enrollando sobre un soporte común dos hilos paralelos, perfectamente aislados, uno al lado del otro.

La ecuación de equilibrio se escribe

$$C\,\Theta = \Phi_{o1}\,I_1 - \Phi_{o2}\,I_2$$

Si el aparato fuese perfectamente simétrico se tendría $\Phi_{o1} = \Phi_{o2} = \Phi_o$, y la desviación mediría la diferencia de las corrientes a comparar

$$C\,\Theta = \Phi_o\,(I_1 - I_2) \qquad (60)$$

En realidad, la simetría no es nunca perfecta, y el aparato queda en el cero cuando

$$\frac{I_1}{I_2} = K = \frac{\Phi_{o2}}{\Phi_{o1}} \qquad (61)$$

Los aparatos pueden ser compensados. Para obtener la misma sensibilidad en intensidad, se shunta el enrollamiento más sensible; para realizar la misma sensibilidad en tensión, definida como $\frac{S_i}{R_g}$, es además necesario igualar las resistencias interiores por medio de una resistencia adicional.

Observemos que en la mayoría de las medidas se trata de eliminar la resistencia interior del galvanómetro de las fórmulas finales.

Es casi inútil agregar que se pueden emplear separadamente los cuadros, o ponerlos en serie o en paralelo para realizar diferentes sensibilidades. Cuando se emplea uno solo de los cuadros el otro puede cerrarse sobre una resistencia variable con el fin de regular el amortiguamiento.

La aislación de los dos circuitos debe ser tan perfecta como sea posible, tanto en el galvanómetro de cuadro como en el de imán móvil, porque toda corriente de fuga falsea los resultados.

Antes de enviar las corrientes, hay que asegurarse siempre de que sus valores no son peligrosos para el galvanómetro. En efecto, como la desviación es practicamente proporcional a la diferencia de corrientes y no a sus valores particulares, se arriesgaría quemar el aparato sin ser advertido por una desviación anormal.

BIBLIOGRAFÍA

Ver también la bibliografía de los capítulos II y III.

1. **W. E. Ayrton y T. Mather** — *Phil. Mag.* t. 46, p. 348, 1898.
2. **H. B. Brooks** — *B. of. St. Journ. of. Res.* t. 4, p. 297, 1930 y *R. G. E.* t. 29, p. 661, 1931.
3. **M. Courtines** — Congrès International d'Electricité, Paris 1932, 1e section, p. 545 — Gauthier - Villars, Paris.
4. **L. Dubar** — *R. G. E.* t. 34, p. 669, 1933.
5. **W. Einthoven** — *Ann. der Phys.* t. 12, p. 1062, 1903; *Wied. Ann.* t. 56, p. 161, 1895.
6. **L. Geiger** — *Phys. Zs.* t. 12, p. 66, 1911.
7. **E. Hochard** — *Bull. Soc. Fr. Phys.* N.° 365, p. 6, S. 7, 1935 o *R. G. E.* t. 37, p. 827, 1935; *C. R. Acad. Sc.* t. 207, p. 981, 1938 o *R. G. E.* t. 45, p. 59, 1939.
8. **G. Ising** — *Phil. Mag.* 7, t. 1, p. 827, 1926.
9. **W. Jaeger** — *Zs. f. Instrkde.* t. 23. p. 261 y 353, 1903; t. 28, p. 206, 1908 y *Ann. d. Phys.* t. 21, p. 64, 1906.
10. **W. H. Julius** — *Wied. Ann.* t. 56, p. 151, 1895.
11. **Y. Le. Grand** — *C. R. Acad. Sc.* t. 207, p. 50, 1938 *o R. G. E.* t. 44, p. 744, 1938.
12. **F. J. Moles** — *G. E. R.* N.° 3, 1933 o *Rev. Electr.* t. 19, p. 333, 1933
13. **W. I. H. Moll y H. C. Burger** — *Zs. f. Phys.* p. 109, 1925; *Phil. Mag.* t. 50, p. 626, 1925 o *R. G. E.* t. 18, p. 933, 1925; *Proc. Roy. Soc.* t. 100, p. 232, 1926.
14. **F. E. Null** — *Journ. Opt. Soc.* t. 12, p. 521, 1926.
15. **A. Rogozinski** — *Bull. Soc. Fr. Phys.* N.° 410, p. 127, S. 128, 1937 o *R. G. E.* t. 43, p. 588, 1938,
16. **W. Volkmann** — *Phys. Zs.* t. 12, p. 30, 77 y 183, 1911; *Ann. der Phys.* t. 10, p. 217, 1903.
17. **F. Zernike** — *Zs. f. Phys.* t. 40, p. 628, 1926.

CAPITULO V.

Galvanómetro balístico. Fluxímetro.

1. Definición y principio del galvanómetro balístico. — Según el vocabulario electrotécnico internacional, se da el nombre de balístico al "galvanómetro destinado a medir una cantidad de electricidad por observación de la primera elongación". Antes de volver sobre esta definición, es necesario examinar el efecto de una descarga en el galvanómetro. Tomemos como origen de los tiempos el instante en que empieza la descarga y hagamos la hipótesis fundamental de que el órgano móvil del galvanómetro es lo suficientemente lento como para que se pueda admitir que cuando empieza el movimiento, en la época t_o, la descarga, cuya duración designaremos por t_d, ya ha terminado: $t_d \leqq t_o$.

Examinemos primero lo que ocurre en el intervalo de tiempo $0 - t_o$. La ecuación del movimiento se escribe

$$K \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + A_o \frac{d\Theta}{dt} + C \Theta = g I \qquad (1)$$

siendo I la corriente en el aparato.

Integremos la ecuación del movimiento en el intervalo de tiempo $0 - t_o$. Resulta

$$K \int_0^{t_o} \frac{d^2 \Theta}{dt^2} dt + A_o \int_0^{t_o} d\Theta + C \int_0^{t_o} \Theta \, dt = g \int_0^{t_o} I \, dt \qquad (2)$$

De acuerdo con nuestra hipótesis, Θ es nulo durante todo el intervalo $0 - t_o$, de manera que $\int_0^{t_o} d\Theta = \int_0^{t_o} \Theta \, dt = 0$; por

otra parte, en el instante $t = 0$ la velocidad del móvil es nula; si designamos por v_o la que adquiere en el instante $t = t_o$, $\int_0^{t_o} \frac{d^2\Theta}{dt^2} dt = v_o$. Observemos finalmente que, terminando la descarga en el instante $t_d \leqq t_o$, la corriente I es nula entre t_d y t_o, de manera que

$$\int_0^{t_o \geqq t_d} I\,dt = \int_0^{t_d} I\,dt = Q$$

donde Q designa la cantidad de electricidad que ha pasado por el galvanómetro. La ecuación (2) se escribe pues

$$K v_o = g\,Q \qquad \text{o sea} \qquad v_o = \frac{g}{K} Q \tag{3}$$

Examinemos ahora lo que ocurre cuando $t \geqq t_o$; tomemos t_o como nuevo origen de los tiempos: entonces en el instante inicial se lanza al móvil de su posición de equilibrio con la velocidad v_o proporcional a Q; la fuente exterior ya no envía corriente, pero si el circuito del galvanómetro está cerrado, la f.e.m. $-g\frac{d\Theta}{dt}$ inducida por el movimiento del órgano móvil produce una corriente; ahora bien, hemos visto ya [II 7, III 2] que todo ocurre como si esta f.e.m. no existiese, pero el coeficiente de amortiguamiento pasara de A_o a $A_o + \frac{g^2}{R}$. Dicho esto, hemos demostrado en el estudio del movimiento [I 7] que la elongación Θ_{max} del móvil que parte del reposo con velocidad v_o es proporcional a esta velocidad, de manera que Θ_{max} medirá a Q. Se tiene en efecto, cualquiera que sea el amortiguamiento

$$\Theta_{max} = \frac{v_o}{w_o} e^{-bt_1} = \frac{g}{K w_o} e^{-bt_1} Q \tag{4}$$

Vemos pues que siempre que se satisfaga la hipótesis fundamental $t_d \leqq t_o$, la cantidad de electricidad Q que atraviesa el balístico es proporcional a la elongación Θ_{max}, *cualquiera que sea la ley de la descarga.* Si no se puede admitir que la descarga ha terminado al empezar el movimiento, Θ_{max} sigue siendo proporcional a Q, pero el coeficiente de proporcionalidad depende

de la ley de la descarga, como lo demostraremos en el parágrafo 10. En todos los casos el coeficiente de proporcionalidad depende del grado de amortiguamiento.

¿Con qué fundamento se impone en la definición la medida de Q por la primera elongación? Sólo habrá más de una elongación si $\alpha < 1$, en cuyo caso las elongaciones, como sabemos, están entre sí, en valor absoluto, en la relación constante $e^{-\lambda}$. Por consiguiente, si bien hay razones prácticas (elongación más grande, duración de la medida más reducida, porque después de la lectura se pueden detener artificialmente las oscilaciones del aparato, etc.) que hacen que efectivamente siempre se mida en la práctica la primera elongación, no hay razón teórica. Se podría objetar que la relación $\frac{\Theta_2}{\Theta_1} = e^{-\lambda}$ no es rigurosa, lo que es cierto, pero la relación (4) tampoco lo es; de manera que en definitiva creemos que la designación "primera elongación" podría crear dudas injustificadas y sería tal vez mejor reemplazarla simplemente por "elongación".

Algunas definiciones (C. E. F. 1929) mencionan que para que un galvanómetro funcione como balístico es necesario que la cantidad de electricidad lo atraviese en un tiempo muy pequeño respecto a su período propio. Esta observación no parece superflua, porque cada vez que se habla de la sensibilidad del balístico, o sea de la sensibilidad en cantidad de electricidad, se subentiende que $t_d \leqq t_o$.

2. Sensibilidad y sensibilidad práctica en cantidad de electricidad. — A partir de (4) definimos la sensibilidad en cantidad de electricidad

$$S_q = \frac{\Theta_{max}}{Q} = \frac{g}{K w_o} e^{-bt_1} = \frac{g\, w_o}{C} e^{-bt_1} = S_{q\ id}\, e^{-bt_1} \qquad (5)$$

haciendo

$$S_{q\ id} = S_i\, w_o \qquad (6)$$

expresión que puede explicitarse según el valor del grado de amortiguamiento (ver I 7):

1) galvanómetro aperiódico, $\alpha > 1$

$$t_1 = \frac{1}{b}\, arcth\, \frac{b'}{b}\ ;\ S_q = S_{q\ id}\, e^{-\frac{b}{b'}\, arcth\, \frac{b'}{b}} =$$

$$= S_{q\,id}\, e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}\, arcth \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}} = S_{q\,id} \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}} \right)^{\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha^2-1}}} \qquad (5a)$$

2) galvanómetro aperiódico crítico, $\alpha = 1$

$$t_1 = \frac{1}{b} = \frac{T_o}{2\pi} \; ; \; S_q = S_{q\,id} \frac{1}{e} \qquad (5b)$$

3) galvanómetro periódico amortiguado, $\alpha < 1$

$$t_1 = \frac{1}{b''} arctg \frac{b''}{b} \; ; \; S_q = S_{q\,id}\, e^{-\frac{\lambda}{\pi} arctg \frac{\pi}{\lambda}} =$$

$$= S_{q\,id}\, e^{\frac{-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\, arctg \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}} \qquad (5c)$$

3a) $\alpha \ll 1$. Es posible a veces simplificar los cálculos reemplazando $e^{-\frac{\lambda}{\pi} arctg \frac{\pi}{\lambda}}$ por los primeros términos de su desarrollo en serie, válido solo si $\lambda < \pi$:

$$e^{-\frac{\lambda}{\pi} arctg \frac{\pi}{\lambda}} = 1 - 0{,}5\,\lambda + 0{,}23\,\lambda^2 - 0{,}071\,\lambda^2 + \ldots \qquad (7)$$

Como ya dijimos en I 7, se puede, sin cometer un error superior al 0,5 %, limitarse al primer término del desarrollo si $\lambda \leqq 0{,}01$ y a los dos primeros si $\lambda \leqq 0{,}15$. En este último caso

$$S_q = S_i\, w_o \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) \qquad (5d)$$

relación que se encuentra frecuentemente, pero que no debe aplicarse si $\lambda > 0{,}15$, caso en el que hay que tomar un número mayor de términos en el desarrollo (7), que pierde entonces su interés, porque el cálculo directo de la función con ayuda de tablas es bastante rápido.

4) galvanómetro periódico no amortiguado, $\alpha = 0$ (caso teórico)

$$t_1 = \frac{T_o}{4} \; ; \; b = 0 \; ; \; S_q = S_i\, w_o = S_{q\,id} \qquad (5e)$$

La curva $\frac{S_q}{S_{q\,id}}(\alpha)$ no es otra cosa que $\frac{\Theta_{max}\, w_o}{v_o}(\alpha) = e^{-\alpha\tau_1}(\alpha)$ indicada en la fig. 15 del capítulo I y que volvemos a dar en la fig. 1. Su determinación experimental está limitada al intervalo comprendido entre α_o, relativo al caso en que el galvanómetro está en circuito abierto, y $\alpha_{c/c}$, relativo al caso en que el galvanómetro está en corto circuito. En este último caso la resistencia $R_{c/c}$ comprende, además de la resistencia interior del aparato R_g, la resistencia de los contactos y las conexiones si la descarga es capacitiva (la medida es posible porque se efectúa el corto circuito después de terminada la descarga pero antes de que empiece el movimiento; ver **V 7**) y además la resistencia interior de la bobina secundaria si la descarga es inductiva; R_g es el límite inferior de $R_{c/c}$.

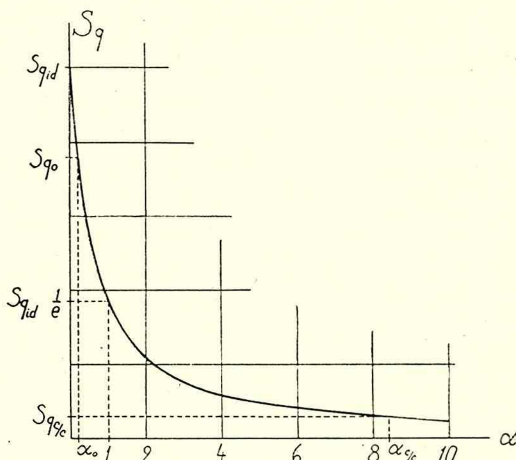


Fig. 1

El dato experimental inmediato es la resistencia del circuito del galvanómetro, R, y no el grado de amortiguamiento α. Es fácil pasar de S_q (α) a S_q (R). Se tiene en efecto

$$\alpha = \alpha_o + \frac{g^2}{2\, R \sqrt{KC}} \tag{8}$$

y en particular, si $R = R_c$

$$\alpha_c = 1 = \alpha_o + \frac{g^2}{2\, R_c\, \sqrt{KC}} \tag{8a}$$

de donde, eliminando $\frac{g^2}{2\, \sqrt{KC}}$ entre (8) y (8a)

$$\alpha = \alpha_o + \frac{R_c}{R}\,(1 - \alpha_o) \tag{9}$$

o aún

$$\alpha \cong \frac{R_c}{R} \qquad (9a)$$

si $\alpha_o << 1$. En corto circuito, considerando el caso límite $R_{c/c} = R_g$

$$\alpha_{c/c} = \alpha_o + \frac{R_c}{R_g}(1 - \alpha_o) \cong \frac{R_c}{R_g} \qquad (10)$$

La curva S_q (R) (fig. 2) parte teoricamente de $S_q = 0$, pero la parte realizable experimentalmente solo empieza para $R_{c/c}$; S_q crece de manera continua con R; para $R \rightarrow \infty$, S_q tiende al valor S_{qo} de la asíntota

$$S_{qo} = S_i\, w_o\, e^{-\frac{\alpha_o}{\sqrt{1-\alpha_o^2}} arctg \frac{\sqrt{1-\alpha_o^2}}{\alpha_o}} = S_{q\,id}\, e^{-\frac{\lambda_o}{\pi} arctg \frac{\pi}{\lambda_o}} \qquad (11)$$

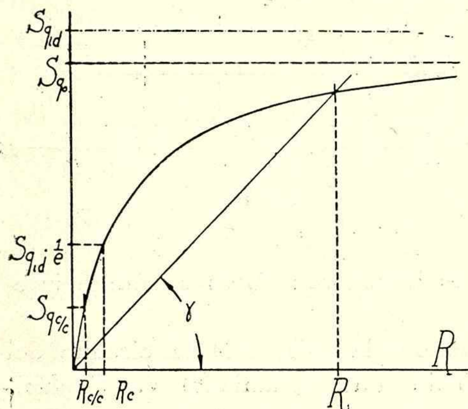


Fig. 2

si el movimiento del galvanómetro es periódico en circuito abierto, como ocurre normalmente.

Las relaciones (5) y (9), aunque dan practicamente buenos resultados, no son rigurosas, porque la ecuación de movimiento con coeficientes constantes sólo es un caso ideal.

En muchos casos es suficiente conocer una ley aproximada, pero más simple, de S_q (R). A este efecto basta observar (*D. Maggiolo de Gerszonowicz y S. Gerszonowicz*) que se puede, con una precisión practicamente excelente, salvo para el caso de reducida importancia en que R es próximo a R_g (véase una comparación numérica en el capítulo VI), asimilar S_q (R) a un arco de hipérbola que cumpla las siguientes condiciones:

1) $R = 0$, $\alpha = \infty$, $S_q = 0$ (caso teórico del galvanómetro de $R_g = 0$ en corto circuito)

2) $R = R_c$, $\alpha = 1$, $S_q = S_{q\,id} \frac{1}{e}$

3) $R = \infty$, $\alpha = \alpha_o$, $S_q = S_{qo} = S_{q\,id}\, e^{-\frac{\lambda_o}{\pi} arctg \frac{\pi}{\lambda_o}}$

Se deduce

$$S_q = S_{qo} \frac{R}{R + m\, R_c} \qquad (12)$$

donde

$$m = e^{1 - \frac{\lambda_o}{\pi} arctg \frac{\pi}{\lambda_o}} - 1$$

Si λ_o es pequeño, o aún si R_c es muy inferior a R, es suficiente hacer $m = 1{,}7$ y escribir

$$S_q = S_{qo} \frac{R}{R + 1{,}7\, R_c} \qquad (12a)$$

La aplicación de la relación (12) solo exige conocer S_{qo}, R_c, R_g y λ_o (o α_o); el constructor indica generalmente sólo las tres primeras, y desgraciadamente no siempre con la precisión que sería de desear; se ve que habría interés en indicar también α_o; cuando falta este dato se aplica (12a).

A la sensibilidad S_q en cantidad de electricidad corresponden la sensibilidad aparente y la sensibilidad práctica, definidas de la misma manera que para la sensibilidad en intensidad o tensión. La sensibilidad práctica en cantidad de electricidad depende pues del grado de amortiguamiento; los catálogos indican esta sensibilidad suponiendo que el galvanómetro esté, sea en circuito abierto, sea desprovisto de todo amortiguamiento, sea con amortiguamiento crítico. La relación entre las sensibilidades referentes a los dos últimos casos es igual a 2,72; la comparación de las mismas con las sensibilidades en circuito abierto sólo puede hacerse si se indica α_o; de lo contrario hay que admitir $\alpha_o = 0$, o sea confundir los dos primeros casos. De cualquier modo, antes de utilizar un valor de la sensibilidad en cantidad de electricidad hay que verificar para que condiciones ha sido dado, y recordar que sólo vale para un circuito con el mismo grado de amortiguamiento.

Se distingue, entendiéndose que la escala está a 1 m. del espejo:

$S_{\mu C^{-1}}$, sensibilidad práctica en milímetros por microcoulomb, definida como la elongación producida por 1 μC en una de las

condiciones de amortiguamiento mencionadas más arriba. En particular, si el amortiguamiento es nulo o crítico $S\mu c^{-1}$ se calcula inmediatamente a partir de $S\mu_A{}^{-1}$:

amortiguamiento nulo: $$S\mu c^{-1} = S\mu_A{}^{-1}. \frac{2\,\pi}{T_0} \qquad (13)$$

amortiguamiento crítico: $$S\mu c^{-1} = S\mu_A{}^{-1}. \frac{2\,\pi}{T_0}\,\frac{1}{e} \qquad (13a)$$

S_C, sensibilidad práctica en coulombs por milímetro, definida como la cantidad de electricidad en coulombs que descargada en una de las condiciones de amortiguamiento mencionadas más arriba produciría una elongación de 1 mm. Si el amortiguamiento es nulo o crítico se calcula inmediatamente a partir de S_A:

amortiguamiento nulo: $$S_C = S_A\,\frac{T_0}{2\,\pi} \qquad (14)$$

amortiguamiento crítico: $$S_C = S_A\,\frac{T_0}{2\,\pi}\,e \qquad (14a)$$

3. Descargas capacitiva e inductiva. Sensibilidad en flujo.—La descarga en el galvanómetro balístico se produce generalmente de dos maneras diferentes, según que la cantidad de electricidad Q que atraviesa el aparato sea la que ha sido almacenada en un condensador (descarga capacitiva) o la debida a la variación de flujo en una parte del circuito (descarga inductiva). Hay entre los dos casos una diferencia fundamental. Consideremos el circuito de la fig. 3; sea C la capacidad del condensador, V_0 la d d.p. de carga, y R la resistencia total de la rama del galvanómetro. Cualquiera que sea R, toda la carga del condensador

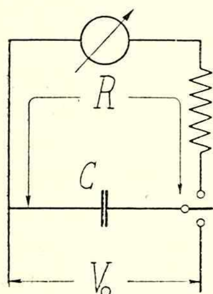


Fig. 3

$$Q = C\,V_0 \qquad (15)$$

atraviesa el balístico; solo varía con R la ley de la descarga, que precisaremos en el parágrafo siguiente.

El grado de amortiguamiento es siempre α_0; se deduce que siempre que la descarga pueda considerarse terminada cuando empieza el movimiento, la variación de R no afectará ni Θ_{max} ni S_q.

Consideremos ahora un caso de descarga inductiva (fig. 4).

Designaremos por i_o la corriente primaria de régimen, por r,l y R,L la resistencia total y el coeficiente de self total de los circuitos primario y secundario respectivamente, por M el coeficiente de inducción mutua. Cuando se cierra el circuito primario, se induce en el secundario una cantidad de electricidad

$$Q = \frac{M\, i_o}{R} = \frac{\Delta\, \psi}{R} \qquad (16)$$

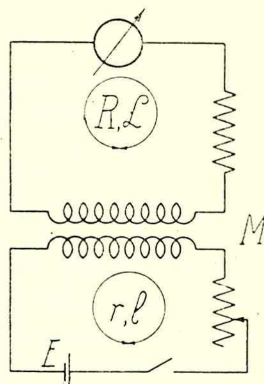


Fig. 4

siendo $\Delta\, \psi = M\, i_o$ la variación de flujo a través del secundario. La elongación $\Theta_{max} = Q\; S_q$ depende doblemente de R, porque Q aumenta y S_q disminuye cuando R disminuye. Podemos preguntarnos cual de estos dos factores, que obran en sentido inverso, es el que predomina; de cualquier manera la sensibilidad S_q no caracteriza más la medida; esto lleva a la definición de la sensibilidad en flujo del galvanómetro

$$S_f = \frac{\Theta_{max}}{\Delta\psi} = \frac{\Theta_{max}}{Q\, R} = \frac{S_q}{R} \qquad (17)$$

Obsérvese (*Chaumat*) que para cada valor R_1 de R, $S_f = \dfrac{S_q}{R_1}$ representa la tangente del ángulo γ formado por el eje de las R y el radio vector que pasa por el punto de la curva $S_q\,(R)$ que tiene R_1 por abscisa (fig. 2). Dada la forma de $S_q\,(R)$, S_f aumenta de manera continua cuando R disminuye; si admitimos la relación (12) resulta:

$$S_f = S_{qo}\, \frac{1}{R + m\, R_c} \cong S_{qo}\, \frac{1}{R + 1{,}7 R_c} \qquad (18)$$

El máximo de S_f se obtiene cuando el galvanómetro está conectado directamente a los bornes de la bobina a través de la cual se hace variar el flujo, pero es de observar que en esas condiciones las lecturas serían muy poco cómodas, porque el galvanómetro resultaría generalmente muy amortiguado y la elongación se produciría muy rapidamente. Sin embargo se puede evitar este inconveniente y aumentar aún más S_f abriendo el circuito inmediatamente después de haber terminado la descarga pero antes

de que haya empezado el movimiento ; en ese caso , si R' es la resistencia del circuito durante la descarga, resulta

$$Q = \frac{\Delta \psi}{R'} \quad \text{y} \quad \Theta'_{max} = \frac{\Delta \psi}{R'} S_{qo}$$

o sea

$$S'_f = \frac{S_{qo}}{R'} \tag{19}$$

El aumento de la sensibilidad en flujo con relación a la que se tendría conservando cerrado el circuito de resistencia R es

$$\frac{S'_f}{S_f} = \frac{S_{qo}}{S_q} \frac{R}{R'} \cong \frac{R + 1{,}7\, R_c}{R'} \tag{20}$$

Para darnos cuenta del aumento de S_f que se puede conseguir de este modo, observemos que en el caso en que no se abre el circuito se impone generalmente, por el motivo que acabamos de mencionar, la condición de conservar R mayor o igual a R_c ; en cambio al abrir el circuito inmediatamente después de la descarga dicho motivo desaparece y el valor mínimo de R' puede sin inconveniente ser próximo a R_g . Haciendo pues en (20) $R = R_c$ y $R' = R_g$, resulta

$$\left(\frac{S'_f}{S_f} \right)_{max} \cong \frac{2{,}7\, R_c}{R_g} \tag{21}$$

Vemos que el aumento de sensibilidad puede ser considerable y justificar la complicación de la instalación. Para abrir el circuito secundario después del pasaje de la descarga, pero antes de que empiece el movimiento, se pueden utilizar llaves mecánicas convenientemente construídas (*Zeleny*) o un relé alimentado al mismo tiempo que se produce la variación de flujo, y cuya constante de tiempo se elige adecuadamente para que el contacto abra el circuito del galvanómetro en el instante requerido (*Belassio*) .

Observemos que toda modificación del circuito después de haber pasado la descarga y antes de que empiece el movimiento obliga a efectuar una corrección si existen efectos termoeléctricos; volveremos sobre este problema en el parágrafo 8 .

A la sensibilidad en flujo corresponde evidentemente una sensibilidad práctica en flujo, una vez especificada la resistencia del circuito . No obstante, ésta no suele indicarse para los galvanómetros balísticos comunes; pero veremos en el parágrafo 11 que

es fácil, mediante una construcción especial de los galvanómetros de cuadro (par director despreciable), obtener que la sensibilidad en flujo se haga independiente de la ley de la descarga, aún cuando ésta no pueda considerarse instantánea, y también, en ciertas condiciones, de la resistencia del circuito. Se concibe que los aparatos en los que se cumplen estas condiciones puedan graduarse directamente en flujo; reciben el nombre de fluxímetros.

La descarga inductiva que acabamos de considerar se debe a la inducción mutua; el galvanómetro balístico se emplea poco para la medida de las descargas debidas a la self-inducción, pero éstas existen siempre como descargas parásitas, que se trata de hacer despreciables para no tener que efectuar correcciones. Estas descargas parásitas intervienen aún en medidas no balísticas ocasionando molestias; así es bien sabido que en las medidas de resistencias con el puente de *Wheatstone* es necesario esperar que haya terminado el período transitorio antes de pronunciarse sobre el efecto de la regulación.

Supongamos un circuito que comprende en serie una self, una resistencia y el galvanómetro ; el establecimiento o la supresión de la corriente están acompañados por el establecimiento o la supresión del campo, luego de la variación del flujo. Por consiguiente habrá siempre una cantidad de electricidad, debida a la self, que atraviesa el galvanómetro, comunicando cierta velocidad inicial al órgano móvil; por otra parte. por el hecho del establecimiento o la supresión de la corriente, el cero del aparato varía : el movimiento será pues el del móvil apartado del cero y abandonado con cierta velocidad inicial, que solo se hace despreciable al mismo tiempo que la constante de tiempo del circuito. Se habría podido pensar en la medida del coeficiente de self por la de la elongación, pero el procedimiento solo presenta interés si se hace nula la corriente en el galvanómetro en régimen permanente, p. ej. colocándolo en una diagonal de un puente de *Wheatstone*. La variación $\triangle i$ de la corriente en la rama cuyo coeficiente de self L se quiere medir provoca una cantidad de electricidad inducida

$q_s = \frac{L \triangle i}{R}$ donde R es la resistencia del circuito visto desde la self considerada; una parte de q_s atraviesa el balístico, cuya elongación mide directamente q_s, a menos de las correcciones debidas a la self-inducción parásita en las otras ramas (*Maxwell*).

Indiquemos todavía otro posible empleo del balístico. Si aplicamos una tensión constante (descarga rectangular) durante un intervalo de tiempo lo suficientemente corto como para poder admitir que el móvil ha permanecido en reposo mientras pasaba la corriente, se puede medir dicho intervalo de tiempo.

En efecto

$$\int_0^{t_x} \frac{V}{R}\, dt = \frac{V}{R}\, t_x = \frac{\Theta}{S_q}$$

de donde se deduce t_x.

4. Elección del período ideal y del grado de amortiguamiento del galvanómetro con respecto a la duración de la descarga. — La hipótesis fundamental $t_d \leqq t_o$ no se cumple rigurosamente, de modo que se presenta naturalmente la pregunta: ¿hasta que punto se justifica la aplicación de la relación (5) en un circuito y para un balístico dados? Un análisis riguroso nos obligaría a estudiar la expresión exacta de la sensibilidad del aparato, y por consiguiente el error que resulta al aplicar (5), en función de los datos del circuito y del galvanómetro. Este problema se tratará en el parágrafo 10; observemos que los cálculos son penosos. Un criterio simple, adoptado desde que se empezó a utilizar el balístico, fué que la duración de la descarga tiene que ser muy pequeña frente al período — agregaremos ideal — del aparato. Se entenderá por duración de la descarga el tiempo que transcurre entre su iniciación y el momento en que la corriente llega a ser una fracción suficientemente pequeña, p ej. 0,01 — 0,001, de la corriente máxima alcanzada durante la descarga.

Para examinar la validez del criterio enunciado trataremos dos casos importantes. Veamos primero la descarga de un condensador (fig. 3): sean V e I la d.d p. en los bornes del condensador y la corriente en el circuito en un instante t. Despreciando los efectos de la self-inducción se tiene

$$C\, dV = -I\, dt$$

$$V = R I$$

de donde, eliminando I

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{CR}\, dt \qquad (22)$$

e integrando desde $t = 0$, $V = V_o$, hasta el instante t

$$V = V_o e^{-\frac{t}{CR}} \quad \text{o sea} \quad I = I_o e^{-\frac{t}{CR}} \tag{23}$$

donde

$$I_o = \frac{V_o}{R} \tag{24}$$

representa la corriente inicial.

El tiempo necesario para que $I = 0{,}01 — 0{,}001\ I_o$ es pues igual a 4,6 — 6,9 veces la constante de tiempo $\tau = C R$ del circuito.

Veamos ahora el caso de una descarga inductiva, relativa al circuito de la fig. 4. Supongamos que se provoque la descarga cerrando el interruptor del circuito primario. Sea E la f e.m. de la fuente del circuito primario, i e I las corrientes primaria y secundaria en un instante cualquiera del régimen variable. Las ecuaciones del circuito son

$$E = r\,i + l\frac{di}{dt} + M\frac{dI}{dt} \tag{25}$$

$$o = R\,I + L\frac{dI}{dt} + M\frac{di}{dt} \tag{26}$$

o sea, eliminando i y $\frac{di}{dt}$

$$\sigma L\,l\frac{d^2 I}{dt^2} + (rL + R\,l)\frac{dI}{dt} + r\,R\,I = o \tag{27}$$

donde σ designa al coeficiente de dispersión

$$\sigma = \frac{Ll - M^2}{L\,l} \tag{28}$$

La solución es, limitándonos al caso frecuente en que $r\,L$ es bastante pequeño frente a $R\,l$

$$I \cong A\,e^{-\frac{R}{\sigma L}t} + B e^{-\frac{r}{l}t} \tag{29}$$

Los datos iniciales $t = o$, $I = o$, $i = o$ dan, a partir de (25) y (26)

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=o} = -E\frac{M}{\sigma L\,l}$$

Haciendo $t = 0$, $I = 0$ en la ecuación (29) y

$t = 0$, $\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = -E\frac{M}{\sigma L l}$ en su derivada, se obtienen dos ecuaciones que determinan las constantes de integración

$$A = -B = E\frac{M}{Rl - r\sigma L}$$

y reemplazando

$$I = E\frac{M}{Rl - r\sigma L}\left\{e^{-\frac{R}{\sigma L}t} - e^{-\frac{r}{l}t}\right\} \quad (30)$$

Como $r\sigma L << Rl$ el primer exponencial se hace rapidamente despreciable y queda entonces

$$I = E\frac{M}{r\sigma L - Rl}e^{-\frac{r}{l}t} \quad (30a)$$

El valor máximo de la corriente, I_{max}, es inferior a

$$I_0 = E\frac{M}{r\sigma L - Rl} \cong -E\frac{M}{Rl} \quad (31)$$

pero aquí es inútil hacer cálculos exactos y para lo que buscamos basta admitir $I_{max} = I_0$, el error no es grande porque $r\sigma L << Rl$; de manera que nos encontramos en un caso completamente análogo al de la descarga del condensador: la corriente en el galvanómetro es 0,01 — 0,001 I_{max} al cabo de 4,6 — 6,9 veces la constante de tiempo.

Ahora podemos precisar. Admitamos que para poder considerar la descarga como practicamente instantánea $t_d \cong 5\tau$ debe ser del orden de 0,01 T_0, o sea

$$\tau \cong 0{,}002\, T_0 \quad (32)$$

Supongamos para fijar las ideas $T_0 = 10$ s.; entonces si $C = 1\ \mu F$ es necesario que $R = \frac{\tau}{C} \leqq 20000\ \Omega$ en la descarga capacitiva del primer caso tratado. Ahora bien, para los mismos valores de C y T_0 resulta del estudio más riguroso (ver el parágrafo 10) que al admitir la descarga instantánea, o sea al aplicar (5), obtendríamos, para $0 \leqq \alpha \leqq 10$, un error inferior a 0,1 °/。 mientras $R \leqq 43000\ \Omega$ (*Lucchi*).

Se ve pues que adoptando para la descarga exponencial el criterio simple (32) se tiene todavía un margen de seguridad importante; se puede sin inconveniente hacer

$$\tau \cong 0{,}005\ T_o \tag{32a}$$

En el segundo caso tratado (descarga inductiva), si $T_o = 10$ s. y $l = 1$ H, se podrá admitir en forma análoga que la descarga es instantánea si $r = \frac{l}{\tau} \geqq 50\,\Omega$ (o aún $20\,\Omega$).

Se observa pues que la zona del empleo posible del balístico es extensa, y, como veremos, puede todavía ser aumentada para las descargas inductivas, utilizando el fluxímetro.

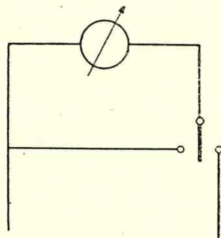
La condición $t_d \ll T_o$, no es la única que hay que considerar. Aunque de ella, de acuerdo con el razonamiento que precede, se deduzca que basta con un valor de T_o inferior a 10 s., se elige siempre T_o por lo menos igual a este valor, y mejor aún a 20 s., con el fin de que la lectura de la elongación sea más cómoda y precisa.

Dentro del mismo orden de ideas nos podemos preguntar que valor del grado de amortiguamiento debemos elegir. A un pequeño valor de α corresponde un $\frac{t_1}{T_o}$ mayor, lo que hace las lecturas más cómodas, aunque hay que observar que el movimiento del móvil después de haber alcanzado la elongación es más lento cuando α aumenta. La sensibilidad en cantidad de electricidad del aparato es más grande cuando α es pequeña; pero no es así para la sensibilidad en flujo, a menos de abrir el circuito una vez terminada la descarga, y antes de que haya empezado el movimiento.

La duración del retorno natural al cero es mínima para α próximo y un poco inferior a 1 (18); cuando el amortiguamiento es muy diferente del crítico es conveniente detener artificialmente el aparato, una vez observada la elongación, sin esperar a que vuelva naturalmente al cero. A este efecto se dispone en serie con el aparato un conmutador que permite abrir el circuito y pone el galvanómetro en corto circuito directo (fig. 5): el amortiguamiento de los aparatos de cuadro móvil — los únicos empleados — es entonces generalmente tan fuerte que el cuadro queda bloqueado bruscamente; se efectúa la puesta en corto circuito cuan-

do el cuadro pasa por cero. En el caso de la descarga inductiva es preferible este dispositivo que una llave de corto circuito dispuesta en derivación sobre el aparato porque abriendo el circuito después de la lectura el móvil vuelve con mayor velocidad hacia el cero. Sin embargo no es posible bloquear el sistema móvil rigurosamente en el cero y cuando se abre el corto circuito persisten oscilaciones de pequeña amplitud. Se puede evidentemente repetir la maniobra, o también utilizar el dispositivo indicado por *Zeleny* (fig. 6), donde el aparato queda cerrado sobre un circuito auxiliar cuya resistencia es tal que el amortiguamiento es crítico; este circuito comprende una bobina de self que tiene en el interior un imán permanente que se puede desplazar, llevando así rapidamente el móvil a cero.

Por otra parte se puede no esperar que el móvil, que efectúa pequeñas oscilaciones, vuelva exactamente al cero, siempre que las oscilaciones no sobrepasen una determinada fracción de la elongación; en ese caso se hace pasar la descarga en el momento en que la desviación es máxima, pero se evalúa la elongación a partir del cero mecánico (*Zeleny*). Volveremos en el parágrafo 8 sobre esta cuestión. De cualquier manera la latitud en la elección de α es bastante grande; se trabaja generalmente con $\alpha_0 \leq \alpha \leq 1$.


Fig. 5

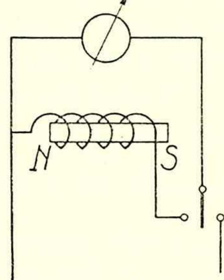


Fig. 6

5. Efectos de la sobreintensidad durante la descarga. — Se ve inmediatamente, aplicando las relaciones (24) y (31) establecidas más arriba, que hay una sobreintensidad notable durante la descarga. Será suficiente tratar el caso de la descarga capacitiva; consideremos, para fijar las ideas, un condensador de 1 μF, cargado bajo una d.d.p. de 1 V, que se descarga directamente en un galvanómetro de las siguientes características: sensibilidad práctica en intensidad 535 mm/m. μA; sensibilidad práctica en cantidad de electricidad en circuito abierto 153 mm/m. μQ; resistencia interior 15 Ω; período ideal $T_0 = 21$ s. La corriente inicial es, practicamente

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{1}{15} = 0{,}067 \text{ A}$$

que deterioraría el aparato en régimen permanente, mientras que la elongación balística es sólo de 153 mm.

Los efectos debidos a la sobreintensidad son de dos clases: térmicos y magnéticos.

Veamos primero los térmicos. La energía gastada en el circuito del galvanómetro por efecto Joule representa practicamente toda la energía almacenada en el condensador, o sea

$$R \int_0^{\infty} I^2 dt \cong R \int_0^{t_o \geqq t_d} I^2\, dt = \frac{1}{2} Q\, V \qquad (33)$$

que vale 0,5 microwatt en el ejemplo numérico tratado: el efecto térmico es despreciable.

Veamos ahora el efecto magnético y consideremos primeramente el caso del galvanómetro de imán móvil. Supongamos que en reposo los imanes forman el ángulo Θ_o con el plano de las bobinas; cuando una corriente I pasa por estas últimas, produce un campo cuya componente en la dirección de los imanes es $G\, I\, sen\, \Theta_o$. Si se admite que la variación del momento magnético de los imanes es proporcional a $G\, I\, sen\, \Theta_o$, el par motor tiene por valor

$$C_m = G I cos\, \Theta_o \,(M + a\, G\, I\, sen\, \Theta_o) =$$

$$= g\, I\, cos\, \Theta_o + b\, I^2\, sen\, \Theta_o\, cos\, \Theta_o \qquad (34)$$

donde a y b son constantes. La relación anterior muestra que para

$$I' = - \frac{g}{b\, sen\, \Theta_o}$$

C_m es nulo; el galvanómetro no desviaría al enviarle la corriente constante I'; pero hay que agregar que I' está practicamente muy por encima de la zona de las corrientes que se miden con el aparato.

Llevemos (34) a la ecuación de movimiento (1) e integremos; resulta, admitiendo que el móvil no se ha movido durante la descarga

$$K\, v_o = g\, Q\, cos\, \Theta_o + b\, sen\, \Theta_o\, cos\, \Theta_o \int_0^{t_o \geqq t_d} I^2\, dt =$$

$$= g\, Q\, cos\, \Theta_o \left(1 + \frac{b\, V\, sen\, \Theta_o}{2\, g R} \right) \qquad (35)$$

teniendo en cuenta la relación (33). Se ve que para

$$sen\,\Theta_0 = -\frac{2\,gR}{b\,V}$$

$v_0 = 0$: el galvanómetro no desviará aunque se le envíe la descarga; los valores de Θ_0 que realizan esta condición constituyen los "puntos muertos" del aparato (*Russell*).

Era pues particularmente importante tratar de hacer Θ_0 nulo en los galvanómetros balísticos de imán, completamente desplazados actualmente por los de cuadro móvil (IV 18).

En los galvanómetros de cuadro existe por supuesto un efecto de la misma naturaleza, aunque es evidente a priori que es de importancia menor, dado el fuerte campo inductor y el pequeño número de espiras del cuadro contra el pequeño momento magnético de los imanes y el gran número de espiras de las bobinas en los galvanómetros de imán.

Si suponemos cilíndricas y coaxiales las piezas polares y el núcleo, el campo creado por el cuadro es radial, lo mismo que el campo inductor, en un ángulo bastante grande La reacción del cuadro modifica la imantación del imán ; felizmente su efecto es pequeño. Para hacerse una idea de ello apliquemos el teorema de la circulación a lo largo de una línea de fuerza que rodea un lado activo del cuadro; se tiene

$$4\,\pi\,n\,I = 2\,H_a\,e$$

donde e es el espesor del entrehierro y n el número de espiras del cuadro. La inducción correspondiente es

$$B_a = \mu_0\,H_a = \frac{2\,\pi\,n\,\mu_0\,I}{e}$$

Si p. ej. $n = 100$, $e = 3.10^{-3}$ m. e $I = 0{,}067$ A, se tiene $B_a = 14{,}10^{-4}$ *u. G.* o sea 14 gauss. B_a es pues poco importante y ocasionará una variación muy pequeña del campo inductor aún en el caso de una corriente particularmente grande; pero sin embargo es útil reducir esta última agregando una resistencia de limitación r en serie con el galvanómetro. Así, de acuerdo con lo visto en el parágrafo precedente, en un aparato cuyo período ideal es de 21 s., la descarga es todavía practicamente instantánea si la resistencia del circuito es de 90000 Ω; se puede pues sin inconveniente hacer p. ej. $r + R_g = 1000\ \Omega$, reduciendo así la corriente máxima a 0,001 A y B_a a alrededor de 0,2 gauss.

Si es posible, conviene adaptar el circuito a cada caso par-

ticular, de manera de hacer completamente despreciable la reacción del cuadro.

6. Medios utilizados para aumentar el período ideal. — El aumento de T_0 se puede obtener por disminución de C y por aumento de K; las dos condiciones son contradictorias: la primera tiende a disminuir la sección del hilo de suspensión y la segunda a aumentar el peso del cuadro. El aumento de K se obtiene frecuentemente fijando sobre el órgano móvil una pieza adicional de momento de inercia constante o ajustable mediante el desplazamiento de masas suplementarias; la fig. 7 representa el dispositivo del galvanómetro balístico Siemens-Halske. En ciertos aparatos se puede colocar un peso sobre el cuadro móvil por medio de una palanca accesible al operador.

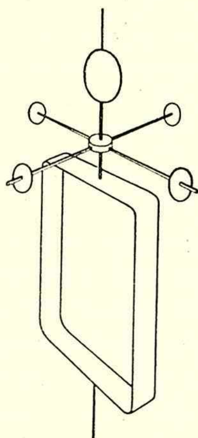


Fig. 7

Es necesario examinar como varía la sensibilidad ideal en cantidad de electricidad cuando se trata de aumentar T_0. La expresión (5e)

$$S_{q\,id} = S_i \frac{2\,\pi}{T_0} = \frac{\Phi_0}{C} \sqrt{\frac{C}{K}}$$

muestra que al disminuir C aumentamos en la misma proporción $S_{q\,id}$ y T_0; se está limitado en este sentido por las consideraciones de solidez mecánica y de fijeza del cero: el par parásito debido a las impurezas ferro-magnéticas del cuadro debe ser despreciable frente al de torsión.

Al aumentar K por medio de masas adicionales disminuimos $S_{q\,id}$ en la misma proporción en que aumentamos T_0. *Carpentier* aumentó pues K de una manera diferente, eligiendo un cuadro ancho (fig. 8), lo que, si se admite B constante, aumenta el flujo Φ_0, contrabalanceando así en la expresión de S_{q0} el efecto del aumento de K. Si admitimos (III 5)

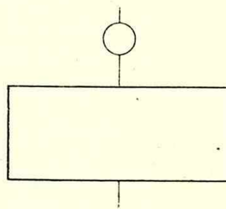


Fig. 8

$$K \cong \frac{\pi\, r^2\, n\, \delta}{2} \left(a\, b^2 + \frac{b^3}{3} \right)$$

siendo el ancho b la única variable, el período aumenta como $b\sqrt{a + \frac{b}{3}}$, mientras que la sensibilidad disminuye como $\sqrt{a + \frac{b}{3}}$.

Un cuadro ancho presenta sin embargo el inconveniente de disminuir la inducción en el entrehierro a igualdad de longitud y sección del imán; el dispositivo ha sido poco empleado.

Hay interés en aumentar el número de espiras n del cuadro aumentando así K y Φ_0 en la misma proporción, de modo que a C constante $S_{q\,id}$ crece como $\sqrt{n}$; sin embargo el gran número de espiras aumenta el par parásito ya mencionado (véase también el capítulo III).

7. Regulación de la sensibilidad del balístico. Shuntado. Apertura del circuito después de terminada la descarga pero antes de que empiece el movimiento. — La expresión

$$S_q = S_i\, w_0\, e^{-bt_1} \tag{5}$$

muestra que para hacer variar la sensibilidad en cantidad de electricidad se puede obrar sobre los mismos factores que para hacer variar S_i, a saber, K, C, g, A_0 y por adjunción de resistencias. Se discutirá la acción sobre las cuatro primeras magnitudes en forma análoga a lo ya efectuado en III 9; sólo analizaremos detenidamente la regulación por adjunción de resistencias, que es la más frecuente.

1) *Resistencia en serie con el galvanómetro.* Ya hemos examinado este caso más arriba; no presenta ningún interés en el caso de la descarga capacitiva, salvo el de limitar la corriente inicial, pero sí en el caso de la descarga inductiva. La fórmula aproximada (12) o (12a) puede ahora ser muy útil. Consideremos p. ej. la comparación de dos coeficientes de inducción mutua empleando el esquema de la fig. 4; sean M_1, i_1, Θ_1 y R_1 respectivamente los valores del coeficiente de inducción mutua, de la corriente primaria, de la elongación y de la resistencia total del circuito secundario en un primer ensayo y M_2, i_2, Θ_2 y R_2 los correspondientes valores en un segundo ensayo; resulta, suponiendo que se comparan M_1 y M_2 por inversión de la corriente primaria en los dos casos, y aplicando la relación (18)

$$\frac{\Delta\psi_1}{\Delta\psi_2} = \frac{2M_1 i_1}{2M_2 i_2} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}\,\frac{S_{f2}}{S_{f1}} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}\,\frac{R_1 + m R_c}{R_2 + m R_c} \tag{36}$$

Un error de p °/₀ sobre $m R_c$ produce uno de

$$p\left[\frac{m\, R_c\,(\,R_2 - R_1\,)}{(\,R_1 + m\, R_c\,)\,(\,R_2 + m\, R_c\,)}\right]\,{}^{\circ}/_{\circ} \tag{37}$$

sobre $\frac{\triangle\,\psi_1}{\triangle\,\psi_2}$, casi siempre muy inferior a $p\,{}^{\circ}/_{\circ}$, de manera que se puede escribir con una precisión generalmente suficiente

$$\frac{M_1\, i_1}{M_2\, i_2} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}\;\frac{R_1 + 1{,}7\, R_c}{R_2 + 1{,}7\, R_c} \tag{38}$$

fórmula de aplicación muy cómoda, en particular en los ensayos balísticos del hierro.

2) *Resistencia en paralelo con el galvanómetro.* Consideremos primero el problema de la repartición de las cargas entre el balístico y el shunt, sin ocuparnos de como se produce la descarga. Sean R_s y l la resistencia y el coeficiente de self-inducción del shunt, R_g y λ las mismas magnitudes relativas al galvanómetro; llamemos I_g, I_s e I a las corrientes en el galvanómetro, en el shunt y total, en un instante cualquiera de la descarga (fig. 9). Se puede escribir

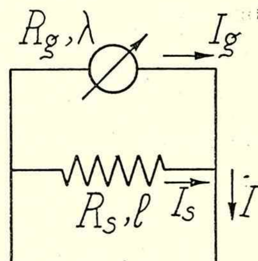


Fig. 9

$$R_g\, I_g + \lambda\,\frac{d\, I_g}{dt} + \frac{d\,\Phi}{dt} = R_s\, I_s + l\,\frac{d\, I_s}{dt} \tag{39}$$

$$I_g + I_s = I \tag{40}$$

donde $\frac{d\,\Phi}{dt}$ representa la f.e.m. inducida en el cuadro a causa de su movimiento. Supongamos que se cumple la hipótesis fundamental de las medidas balísticas, a saber, que el movimiento no empieza sino después de terminada la descarga; entonces el témino $\frac{d\,\Phi}{dt}$ desaparece de la primera ecuación. Integremos para la duración t_d de la descarga:

$$R_g \int_0^{t_d} I_g\, dt + \lambda \int_0^{t_d} d\, I_g = R_s \int_0^{t_d} I_s\, dt + l \int_0^{t_d} d\, I_s \tag{41}$$

$$\int_0^{t_d} I_g\, dt + \int_0^{t_d} I_s\, dt = \int_0^{t_d} I\, dt \tag{42}$$

Pero $\int_0^{t_d} I_g \, dt = Q_g$ es la cantidad de electricidad que ha pasado por el galvanómetro, $\int_0^{t_d} I_s \, dt = Q_s$ es la que ha pasado por el shunt y $\int_0^{t_d} I \, dt = Q$ es la total que ha pasado por el circuito; además

$$\int_0^{t_d} d\, I_g = \int_0^{t_d} d\, I_s = 0$$

porque $I_g = I_s = 0$ en el instante $t = 0$ y en el $t = t_d$. Se escribe pues

$$R_g\, Q_g = R_s\, Q_s \qquad (43)$$

$$Q_g + Q_s = Q \qquad (44)$$

de donde

$$Q_g = Q \frac{R_s}{R_g + R_s} \qquad (45)$$

La ley de la repartición de la cantidad de electricidad es la misma que la de la repartición de la corriente permanente, siempre que el movimiento del órgano móvil empiece una vez terminada la descarga.

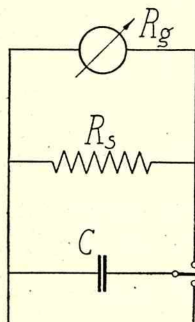


Fig. 10

Establecido este resultado, podemos considerar la acción del shunt sobre la sensibilidad según la manera de producirse la descarga.

a) *Descarga capacitiva* (fig. 10). Al colocar el shunt, la elongación del balístico disminuye por dos razones: 1.°) la cantidad de electricidad a través del balístico pasa de Q a $Q \frac{R_s}{R_g + R_s}$. 2.°) el amortiguamiento del galvanómetro, que antes estaba en circuito abierto ($R = \infty$) y ahora está en circuito cerrado ($R = R_g + R_s$), aumenta, y la sensibilidad disminuye. La relación de las elongaciones antes (Θ'_{max}) y después (Θ''_{max}) del shuntado es por consiguiente

$$\frac{\Theta'_{max}}{\Theta''_{max}} = \frac{R_g + R_s}{R_s} \cdot \frac{S_{q\,o}}{S_q} \qquad (46)$$

Refiriéndonos a la cantidad de electricidad total descargada, todo pasa como si la sensibilidad del balístico se redujera de $S_{q\,o}$ a

$$S'_q = S_q \frac{R_s}{R_s + R_g} = S_{q\,o} \frac{S_q}{S_{q\,o}} \cdot \frac{R_s}{R_s + R_g} \tag{47}$$

El valor de S_q se deduce inmediatamente de la curva $S_q\,(R)$. Si no disponemos de esta curva y es suficiente un valor aproximado, se obtiene rapidamente S'_q llevando la relación (12a) a (44):

$$S'_q = S_{q\,o} \frac{R_s}{R_s + R_g + 1{,}7\, R_c} \tag{48}$$

Haciendo variar R_s se puede calibrar el balístico (ver también el capítulo VI); pero el método no es conveniente para los amortiguamientos grandes porque a igualdad de Q la desviación disminuye practicamente proporcionalmente a R_s cuando esta resistencia es pequeña. No obstante, es posible aplicar este método aún cuando $R_s = 0$, descargando el condensador en el galvanómetro no shuntado, y luego, una vez pasada la descarga pero antes de que haya empezado el movimiento, cerrando el aparato sobre el shunt. La sucesión de las operaciones se obtiene facilmente con ayuda de un conmutador convenientemente construído (*Zeleny*, fig. 11). Por el hecho de la modificación del circuito entre el momento de la descarga y el de la lectura, puede ser necesaria una corrección debida a la fuerza termoeléctrica; volveremos sobre este punto en el parágrafo 8. La complicación de la instalación hace que sea preferible la descarga inductiva para el calibrado de los aparatos con fuertes amortiguamientos.

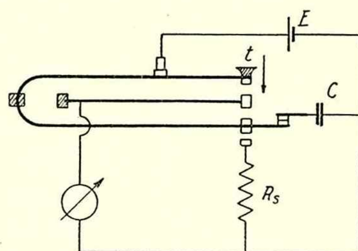


Fig. 11

b) *Descarga inductiva* (fig. 12). La elongación del balístico disminuye al shuntarlo por las mismas dos razones del caso anterior. En ausencia del shunt, la cantidad de electricidad que pasa por el balístico es

$$Q = \frac{\Delta\, \psi}{R_g + R_b} \tag{49}$$

donde R_b es la resistencia del secundario. Después de colocar el

shunt la cantidad de electricidad total inducida aumenta, pero se divide entre el shunt y el balístico; por este último pasa

$$Q'_g = \triangle\psi \frac{R_s}{R_s (R_g + R_b) + R_g R_b} \tag{50}$$

La cantidad de electricidad que ha atravesado el aparato (a $\triangle\psi$ constante) se ve pues reducida en la relación

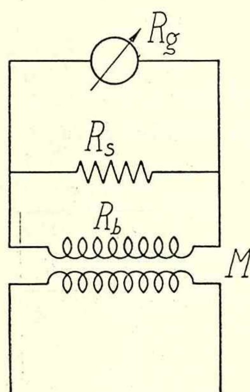


Fig. 12

$$\frac{Q'_g}{Q} = \frac{R_s (R_g + R_b)}{R_s (R_g + R_b) + R_g R_b} \tag{51}$$

En particular, si $R_s = R_g$, se tiene

$$\frac{Q'_g}{Q} = \frac{R_g + R_b}{R_g + 2 R_b} \tag{51a}$$

La reducción de Q es pues generalmente poco importante; para que sea sensible es necesario que la resistencia del shunt sea muy pequeña. La disminución de la sensibilidad S_q contribuye, con la reducción de Q, a la disminución de la elongación Θ_{max} a igualdad de $\triangle\psi$. Sin embargo, es evidente que la necesidad de emplear un shunt de resistencia muy pequeña para obtener una reducción sensible de Θ_{max} es un inconveniente; por una parte el balístico está muy amortiguado, por lo tanto la lectura es incómoda, y por otra parte la resistencia de los contactos y las conexiones puede no ser despreciable frente a la del shunt; de manera que esta regulación presenta poco interés.

3) *Resistencias en serie y en paralelo. Shunt universal.* En ciertos casos, p. ej. cuando se quiere limitar la corriente en el galvanómetro o tener siempre el mismo amortiguamiento, se recurre a la adjunción de una resistencia en serie y otra en paralelo. Examinemos el problema del amortiguamiento constante.

a) *Descarga capacitiva* (fig. 13). Se obtiene un amortiguamiento constante colocando un shunt universal de resistencia total r en los bornes del galvanómetro. La sensibilidad sin shunt es $S_{q\,o}$; colocado el shunt y con el cursor en 1/1 todo pasa como si la sensibilidad se redujese a

$$S'_{q\,1} = S_{q\,o} \frac{S_q}{S_{q\,o}} \frac{r}{r + R_g} \cong S_{q\,o} \frac{r}{r + R_g + 1{,}7\,R_c} \qquad (48)$$

y a

$$S'_{q\,n} = \frac{S'_{q\,1}}{n} \qquad (52)$$

con el cursor en 1/n.

La relación $\frac{S'_{q\,n}}{S'_{q\,1}}$ es sólo función de la posición del cursor.

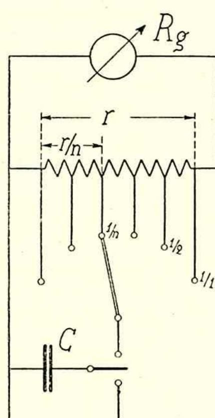


Fig. 13

b) *Descarga inductiva.* Si se coloca una resistencia r constante en serie con el galvanómetro, estando el conjunto shuntado por una resistencia variable R_s, y si, como ocurre generalmente, $\frac{R_b\,R_s}{R_b + R_s} << R_g + r$, se puede considerar el amortiguamiento como practicamente constante. Si r es regulable, se puede mantener el amortiguamiento rigurosamente constante haciendo $r + \frac{R_b\,R_s}{R_b + R_s} = \text{constante} = r' + R_b$, siendo r' el valor de r sin shunt. En estas condiciones la sensibilidad en flujo es

$$S_f = \frac{S_q}{R_g + r' + R_b} \qquad (53)$$

sin shunt y

$$S_f = \frac{S_q\,R_s}{R_b\,(\,R_g + r + R_s\,) + (\,R_g + r\,)\,R_s} \qquad (54)$$

con shunt.

8. Corrección debida a la fuerza termoeléctrica. — Supongamos el circuito del balístico cerrado; si hay una fuerza termoeléctrica, la posición de equilibrio del spot es un falso cero. Provoquemos la descarga; siempre que el circuito no se modifique desde el instante en que comienza la descarga hasta el instante de la elongación, ésta se cuenta a partir del falso cero, y no hay que preocuparse de la fuerza termoeléctrica, que normalmente puede considerarse constante durante la medida. El problema se complica en el caso en que se modifica el circuito del galvanómetro una vez pasada la descarga pero antes de que empiece el movimiento.

Ya indicamos que hay dos casos donde puede justificarse tal manera de proceder:

1) se quiere determinar por descarga capacitiva la sensibilidad del aparato shuntado por una resistencia muy pequeña.

2) se quiere aumentar al máximo la sensibilidad en flujo del aparato.

Veremos más adelante que el estudio de la corrección a efectuar es el mismo en los dos casos; consideremos pues el primero.

Antes de hacer pasar la descarga se anota el cero mecánico del aparato, que está en circuito abierto (eje 00', fig. 14); se provoca la descarga y se cierra el circuito apenas pasada ésta, pero antes de que haya empezado el movimiento; se anota la elongación Θ_1, y, una vez extinguido el movimiento propio, la desviación Θ_0 debida a la fuerza termoeléctrica (eje ff', fig. 14). Hay que estudiar la corrección $\varepsilon\,\Theta_0$ a efectuar sobre Θ_1; *Zeleny* estudió experimentalmente ε en función de la relación $\dfrac{\text{resistencia del circuito}}{\text{resistencia crítica}}$, relación que según (9a) representa $\dfrac{1}{\alpha}$ si α_0 es despreciable. *Klopsteg* volvió a encontrar los resultados de *Zeleny* en el caso en que $\alpha \leqq 1$ por un razonamiento aproximado que lo condujo directamente a la relación (61), que no puede poner en evidencia la influencia del sentido de la fuerza termoeléctrica sobre la corrección, y no precisó sus límites de aplicación.

Un razonamiento más riguroso nos ha permitido efectuar una discusión más exacta, y tanto para $\alpha > 1$ como para $\alpha \leqq 1$; vamos a exponerlo a continuación.

Según que Θ_0 sea del mismo sentido (fig 14a) o de sentido contrario (fig. 14b) que Θ_1, las condiciones iniciales del movimiento alrededor del falso cero serán $\mp\,\Theta_0$, v_0, y la elongación

$$\Theta'_{max} = \Theta_1 \mp \Theta_0$$

es [ver I 5, fórmulas (33) y (34), (60) y (61), (46) y (49)]

$$\alpha > 1:\ \Theta'_{max} = \frac{\sqrt{(\mp\,\Theta_0\,b + v_0)^2 - (\mp\,\Theta_0\,b')^2}}{w_0} \times$$

$$\times\, e^{-\frac{b}{b'}\,arcth\,\frac{b'\,v_0}{b\,v_0 \mp w_0{}^2\,\Theta_0}} \qquad (55a)$$

$$\alpha = 1: \ \Theta'_{max} = \frac{v_o \mp \Theta_o b}{b} \, e^{-\frac{v_o}{v_o \mp \Theta_o b}} \tag{55b}$$

$$\alpha < 1: \ \Theta'_{max} = \frac{\sqrt{(\mp \Theta_o b + v_o)^2 + (\mp \Theta_o b'')^2}}{w_o} \times$$

$$\times \, e^{-\frac{b}{b''} \, arctg \, \frac{b'' v_o}{b \, v_o \mp w_o^{\,2} \, \Theta_o}} \tag{55c}$$

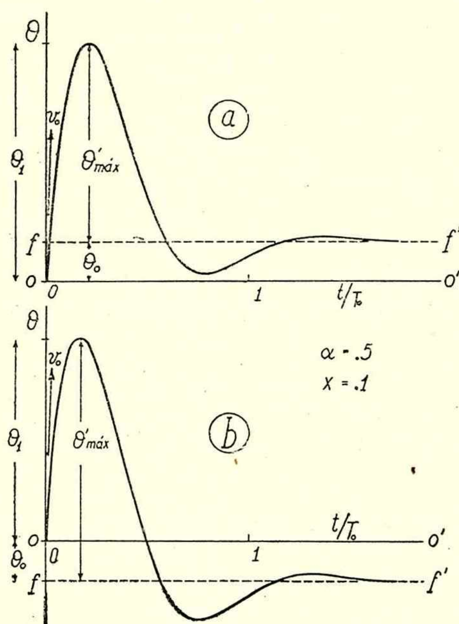


Fig. 14

Hagamos

$$x = \frac{\Theta_o \, w_o}{v_o} \tag{56}$$

que es la relación de la desviación Θ_o debida a la fuerza termoeléctrica a la elongación $\frac{v_o}{w_o}$ que se produciría en ausencia de amortiguamiento ($\alpha = 0$); x es generalmente pequeño, del orden de algunos centésimos.

Vamos a poner las expresiones de Θ'_{max} bajo una forma más cómoda para la finalidad que buscamos:

$$\alpha > 1: \Theta'_{max} = \frac{\Theta_o}{x} \sqrt{1 \mp 2 \alpha x + x^2} \, e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \, arcth \, \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha \mp x}} \tag{57a}$$

$$\alpha = 1: \Theta'_{max} = \frac{\Theta_o}{x} (1 \mp x) \, e^{-\frac{1}{1 \mp x}} \tag{57b}$$

$$\alpha < 1: \Theta'_{max} = \frac{\Theta_o}{x} \sqrt{1 \mp 2 \alpha x + x^2} \, e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \, arctg \, \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha \mp x}} \tag{57c}$$

En ausencia de fuerza termoeléctrica se habría medido [17, fórmulas (79), (80), (81) y (82)]

$$\Theta_{max} = \frac{v_o}{w_o} e^{-\alpha \tau_1} \qquad (58)$$

o sea, explicitando y teniendo en cuenta (56)

$$\alpha > 1 : \Theta_{max} = \frac{\Theta_o}{x} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha}} \qquad (58a)$$

$$\alpha = 1 : \Theta_{max} = \frac{\Theta_o}{x} \cdot \frac{1}{e} \qquad (58b)$$

$$\alpha < 1 : \Theta_{max} = \frac{\Theta_o}{x} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}} \qquad (58c)$$

La corrección a agregar a Θ'_{max} es por consiguiente $\varepsilon_1 \Theta_o$, con ε_1 tal que

$$\alpha > 1 : \varepsilon_1 = \frac{\Theta_{max} - \Theta'_{max}}{\Theta_o} = \frac{1}{x} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha}} \times$$

$$\times \left(1 - \sqrt{1 \mp 2 \alpha x + x^2}\, e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \operatorname{arcth} \frac{\pm x \sqrt{\alpha^2 - 1}}{1 \mp \alpha x}} \right) \qquad (59a)$$

$$\alpha = 1 : \varepsilon_1 = \frac{1}{x} \frac{1}{e} \left(1 - (1 \mp x)\, e^{\frac{\mp x}{1 \mp x}} \right) \qquad (59b)$$

$$\alpha < 1 : \varepsilon_1 = \frac{1}{x} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}} \left(1 - \sqrt{1 \mp 2 \alpha x + x^2} \times \right.$$

$$\left. \times\, e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \operatorname{arctg} \frac{\pm x \sqrt{1 - \alpha^2}}{1 \mp \alpha x}} \right) \qquad (59c)$$

Estas expresiones son exactas pero complicadas; vamos a simplificarlas en dos etapas, para mostrar la influencia del signo de Θ_o. Ya hemos observado que x es pequeño y que el producto αx, aún para $\alpha > 1$, es siempre practicamente pequeño frente a la unidad, de manera que se puede escribir, desarrollando en serie las expresiones entre paréntesis de las relaciones anteriores

$$\varepsilon'_1 = e^{-\alpha \tau_1} 2 \alpha \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\alpha x}{1 - \alpha x} \right) \qquad (60\,a)$$

$$\varepsilon''_1 = - e^{-\alpha \tau_1} 2 \alpha \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\alpha x}{1 + \alpha x} \right) \qquad (60\,b)$$

expresiones válidas cualquiera que sea el valor de α, debiéndose tomar (60a) si Θ_o es del mismo sentido que Θ_1, y (60b) si Θ_o es de sentido contrario a Θ_1.

La corrección a efectuar si se mide Θ_1 (*Zeleny*) es evidentemente restar $(1 - \varepsilon'_1)\,\Theta_o = \varepsilon'\,\Theta_o$ en el primer caso, agregar $(1 + \varepsilon''_1)\,\Theta_o = \varepsilon''\,\Theta_o$ en el segundo.

Las expresiones simplificadas (60a) y (60 b) de ε'_1 y ε''_1 demuestran claramente que la corrección depende de x; pero si αx es suficientemente pequeño se puede proseguir la simplificación, llegando a una fórmula particularmente interesante. En efecto, si $\frac{1}{4} \frac{\alpha x}{1 - \alpha x}$ es despreciable frente a la unidad, se obtiene simplemente

$$\varepsilon'_1 = - \varepsilon''_1 = \varepsilon_1 = 2 \alpha e^{-\alpha \tau_1} \qquad (61)$$

Es en efecto inútil tratar de evaluar la corrección con una gran precisión. Θ_o es pequeño, y es suficiente que el error absoluto sobre $\varepsilon\,\Theta_o$ sea netamente inferior al de lectura. Si de esta condición resulta que basta conocer ε con una precisión del 5 °/₀, se podrá aplicar (61) siempre que

$$\frac{1}{4} \frac{\alpha x}{1 - \alpha x} < 0{,}05$$

o sea

$$\alpha x < 0{,}16 \qquad (62)$$

de manera que si el galvanómetro está poco amortiguado se puede aplicar (61) aún para valores de x importantes; la relación (62) precisa la observación de Zeleny de que la corrección no

depende del sentido de desviación de Θ_0 si ésta es pequeña (< 5 mm) y si la elongación es por lo menos igual a $3\,\Theta_0$.

La curva $e^{-\alpha\tau_1}(\alpha) = \frac{\Theta_{max}\,w_0}{v_0}(\alpha)$, que se ha dado en la fig. 1, nos permite trazar la que representa la relación (61); los puntos son los obtenidos experimentalmente por *Zeleny* en 1906 (fig. 15). Se puede ver que la concordancia, ya notada por *Klopsteg* para $\alpha \leqq 1$, es excelente, especialmente teniendo en cuenta que la ecuación de movimiento con coeficientes constantes, que nos sirve para el estudio matemático, no representa más que el caso ideal.

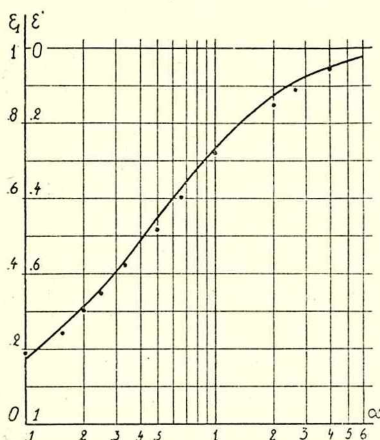


Fig. 15

Consideremos ahora el caso de la descarga inductiva cuando se quiere aumentar al máximo la sensibilidad en flujo del aparato. Antes de hacer pasar la descarga se anota el falso cero; luego se provoca la descarga y se abre el circuito; el movimiento se hace entonces alrededor del cero mecánico. Si Θ_0 es del mismo sentido que Θ_1 las condiciones iniciales son Θ_0, v_0 y nos encontramos en un caso análogo al de la descarga capacitiva cuando Θ_0 es de sentido contrario a Θ_1 (fig. 14b). Del mismo modo, cuando Θ_0 es de sentido contrario a Θ_1 en la descarga inductiva, la corrección es la misma que en la descarga capacitiva donde Θ_0 es del mismo sentido que Θ_1 (fig. 14a).

El resultado era de prever porque en la descarga capacitiva se cierra el circuito después de la descarga, mientras que se abre en la descarga inductiva que consideramos ahora.

De la discusión anterior se puede deducir una observación interesante cuando αx es lo suficientemente pequeño como para que $\varepsilon_1\,\Theta_0$ sea despreciable. Esto puede ocurrir en la descarga inductiva cuando se abre el circuito después de la descarga; basta entonces leer las elongaciones a partir del cero mecánico para no tener que hacer la corrección. Un caso completamente análogo puede presentarse con el aparato montado en forma común, o sea cuando no se modifica el circuito después de la descarga.

En efecto, supongamos que el órgano móvil no está en reposo. En el instante en que es máxima en valor absoluto, la oscilación es asimilable a la desviación termoeléctrica, y lanzando la descarga, la elongación leída será correcta siempre que se la cuente a partir del cero. Estos enunciados se deben a *Zeleny*, que limita la validez de su aplicación a que la oscilación no sobrepase al 3 °/₀ de la elongación. El estudio teórico que acabamos de hacer permite precisar más. En efecto, si podemos confundir Θ_{max} y Θ'_{max} siempre que el error relativo que resulta sea inferior a 0,005, se deduce

$$\Theta_{max} - \Theta'_{max} = \varepsilon_1 \, \Theta_0 < 0{,}005 \, \Theta_{max}$$

o sea

$$\frac{\Theta_{max} \, w_0}{v_0} \, 2 \, a \, \Theta_0 < 0{,}0005 \, \Theta_{max}$$

de donde

$$a \, x < 0{,}0025 \qquad (63)$$

y si p. ej $x = 0{,}03$ es necesario que

$$a < 0{,}08 \quad \text{o} \quad \lambda < 0{,}25$$

La regla de *Zeleny* no puede pues aplicarse sin discernimiento.

9. Métodos de multiplicación y de retroceso para la lectura de las elongaciones. — Los dos métodos suponen que el amortiguamiento del galvanómetro es netamente inferior al crítico.

1) *Método de multiplicación.* Enviemos una descarga al aparato; el órgano móvil adquiere una velocidad inicial v_0, alcanza la primera elongación Θ_{max} y vuelve hacia el cero; supongamos que en el instante en que pasa por cero se le envíe una descarga igual a la anterior pero de sentido contrario; en este caso la velocidad del móvil, que sin descarga suplementaria habría sido $v_0 \, e^{-\lambda}$ (la velocidad en el instante en que $\Theta = 0$ es siempre proporcional a la elongación que sigue) se convierte en $v_0 \, (1 + e^{-\lambda})$. El móvil alcanza la elongación y vuelve a pasar por cero con la velocidad $v_0 \, e^{-\lambda} \, (1 + e^{-\lambda})$; en ese momento le enviamos una nueva descarga, de sentido contrario a la anterior, que lleva su velocidad a $v_0 \, (1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda})$. Procediendo en esta forma un gran número de veces, la velocidad tiende a

$$v_{max} = v_0 \left(1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} + \ldots + e^{-n\lambda} + \ldots \right) = \frac{v_0}{1 - e^{-\lambda}} \quad (64)$$

cuando n tiende a infinito. Practicamente se repiten las descargas hasta que la elongación Θ'_{max} no aumenta más; Θ'_{max} corresponde a v_{max}. La primera elongacióa que se habría leído sin multiplicar la descarga sería Θ_{max}, que corresponde a v_0; de manera que

$$\Theta_{max} = \Theta'_{max} \left(1 - e^{-\lambda} \right) = \Theta'_{max} \frac{k - 1}{k} \quad (65)$$

donde $k = e^{\lambda}$ designa la relación de dos elongaciones sucesivas tomadas en valor absoluto. La amplificación $\frac{\Theta'_{max}}{\Theta_{max}} = \frac{k}{k - 1}$ sólo es interesante si k es próximo a la unidad, o sea para aparatos poco amortiguados.

Hemos supuesto que se podía enviar la descarga a voluntad en los dos sentidos; si esto no fuera posible, se esperará, para iniciar la segunda descarga, a que el órgano móvil pase por el cero en el mismo sentido que en la primera elongación; la velocidad restante es ahora $v_0 e^{-2\lambda}$; los resultados anteriores valen reemplazando $e^{-\lambda}$ por $e^{-2\lambda}$ o sea k por k^2: la amplificación es menor.

Sin embargo, aplicando el procedimiento de multiplicación la medida es más larga, y el error sobre $\frac{\Theta'_{max}}{\Theta_{max}}$ aumenta cuando k se aproxima a la unidad, es decir, en el único caso en que la medida tiene interés. Además, es evidente que no se pueden enviar las descargas sucesivas en el instante preciso en que el móvil pasa por cero, pero no insistiremos, porque el método, empleado antiguamente con galvanómetros de imán móvil poco amortiguados, y más para acusar las cargas que para medirlas, no presenta actualmente interés. Observemos con todo que el procedimiento de multiplicación ha podido también utilizarse para medir, o mejor acusar, una corriente permanente muy pequeña: se sabe (I 14) que al cerrar el circuito el móvil no llega a la posición de equilibrio sino después de las oscilaciones propias; si al cabo de medio período (el período puede medirse en un ensayo suplementario), o sea en el instante en que el móvil alcanza la elongación

$\Theta_0 (1 + e^{-\lambda})$, se invierte la corriente, el móvil se encuentra apartado $\Theta_0 (2 + e^{-\lambda})$ de su nueva posición de equilibrio, y en su movimiento para llegar a ella acusa la elongación máxima $\Theta_0 (2 + e^{-\lambda}) e^{-\lambda} + \Theta_0$; en este momento se invierte de nuevo la corriente y así sucesivamente. La elongación máxima, que se obtiene practicamente después de un número de inversiones suficiente para que no haya más aumento, es

$$\Theta_{max} = 2\,\Theta_0 \left(1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} + \ldots \right) - \Theta_0 = \Theta_0 \frac{1 + e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \quad (66)$$

2) *Método de retroceso.* Cuando se puede reproducir periodicamente la descarga en los dos sentidos, *Weber* indicó el método siguiente, que fué utilizado para hacer medidas cuando se quería repetir la experiencia un cierto número de veces sin tener que esperar el retorno al cero. Hagamos pasar la descarga; el móvil parte con la velocidad v_0 y al cabo de un período pasa por la posición de equilibrio con la velocidad $v_0\, e^{-2\lambda}$. Si en este momento se hace pasar de nuevo la descarga, pero en sentido *inverso*, el móvil parte en sentido inverso con la velocidad $v_0 (1 - e^{-2\lambda})$ Al cabo de un nuevo período pasa

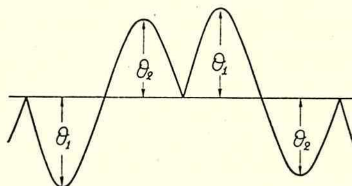


Fig. 16

por cero con la velocidad $v_0 (1 - e^{-2\lambda}) e^{-2\lambda}$: entonces se le envía una descarga de sentido contrario a la de la última vez, lo que produce un nuevo cambio de sentido, con la velocidad $v_0 (1 - e^{-2\lambda} + e^{-4\lambda})$; se repite este procedimiento hasta que las elongaciones no cambien más de amplitud; el movimiento tiene finalmente el aspecto indicado por la fig. 16, donde la elongación mayor Θ_1 es

$$\Theta_1 = \Theta_{max}\left(1 - e^{-2\lambda} + e^{-4\lambda} - e^{-6\lambda} + \ldots \right) =$$

$$= \Theta_{max} \frac{1}{1 + e^{-2\lambda}} \quad (67)$$

siendo Θ_{max} la elongación correspondiente a v_o, que se mediría en el caso de una descarga única; como siempre $e^{-\lambda} = \frac{\Theta_2}{\Theta_1}$.

El método, que era interesante con galvanómetros de imán poco amortiguados y de amortiguamiento electromagnético despreciable, no lo es para los galvanómetros de cuadro, únicos empleados actualmente.

10. Estudio del caso en que la descarga no ha terminado cuando empieza el movimiento del órgano móvil. — Sea I' la corriente que realmente atraviesa el aparato en un instante dado y Θ la desviación del móvil en el mismo instante. Las ecuaciones del sistema, despreciando los efectos de la capacidad de los conductores y enrollamientos, son

$$K \frac{d^2\Theta}{dt^2} + A_o \frac{d\Theta}{dt} + C\,\Theta = g\,I' \tag{68}$$

$$E - L\frac{d\,I'}{dt} - g\frac{d\Theta}{dt} = R\,I' \tag{69}$$

donde E es la f.e.m. o d.d.p. exterior que obra en el circuito del galvanómetro. Supondremos que E es independiente del movimiento del órgano móvil.

La f.e.m. de self inducción $E_s = -L\frac{dI'}{dt}$ es siempre practicamente despreciable en las descargas capacitivas o por inducción mutua; así, según *Worthing*, en un circuito cuyo coeficiente de self L es de 1 henry y cuya resistencia R es de 1000 ohm, de manera que su constante de tiempo es superior a la de los circuitos corrientemente empleados, por el hecho de despreciar E_s se comete un error de sólo 0,2 °/₀.

A partir de (69) se obtiene entonces

$$I' = \frac{1}{R}\left(E - g\frac{d\Theta}{dt} \right) \tag{70}$$

y se llega a la ecuación de movimiento

$$K\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \left(A_o + \frac{g^2}{R} \right)\frac{d\Theta}{dt} + C\,\Theta = g\frac{E}{R} = g\,I \tag{71}$$

en lugar de la ecuación diferencial de 3er. orden, que se obten-

dría teniendo en cuenta E_s, pero suponiendo E independiente de Θ.

La relación (71) muestra que todo ocurre como si la corriente en el galvanómetro fuese $I = \frac{E}{R}$, que es la corriente que pasaría por el circuito del galvanómetro si no se originara ninguna f.e.m. por el hecho del movimiento del cuadro, pero a condición de aumentar en $\frac{g^2}{R}$ el coeficiente de amortiguamiento A_o en circuito abierto. Es necesario darse cuenta bien claramente de que no es I sino I' la corriente realmente existente en un instante dado y que sería registrada por un oscilógrafo ideal; I e I' sólo se confunden si $g \frac{d\Theta}{dt}$ es despreciable frente a E, lo que ocurre en los circuitos de resistencia suficientemente elevada.

Busquemos la solución general de (71); examinemos los diversos casos según el valor del grado de amortiguamiento.

1) $\alpha > 1$. Resulta

$$\Theta = M\, e^{(-b+b')\,t} + N\, e^{(-b-b')\,t} +$$

$$+ \frac{g}{2\,b'K} \left\{ e^{(-b+b')\,t} \int I\, e^{-(-b+b')\,t}\, dt - \right.$$

$$\left. - e^{(-b-b')\,t} \int I\, e^{-(-b-b')\,t}\, dt \right\} \qquad (72)$$

Las constantes M y N se determinan por las condiciones iniciales Derivando (72) y expresando que al principio de la descarga ($t = o$) el órgano móvil está en reposo ($\Theta_o = o$) y su velocidad es nula ($v_o = o$), resulta

$$M = -\frac{g}{2\,b'K} \left[\int I\, e^{-(-b+b')\,t}\, dt \right]_{t=o}$$

y

$$N = \frac{g}{2\,b'K} \left[\int I\, e^{-(-b-b')\,t}\, dt \right]_{t=o}$$

lo que da, después de sustituir en (72), el valor de la desviación Θ relativa a un instante cualquiera t:

$$\Theta = \frac{g}{2\,b^{\text{I}}\,K}\, e^{-bt} \left\{ e^{b^{\text{I}} t} \int_o^t I\, e^{-(-b+b^{\text{I}})\,t}\, dt - \right.$$

$$\left. - e^{-b^{\text{I}}\,t} \int_o^t I\, e^{-(-b-b^{\text{I}})\,t}\, dt \right\} \qquad (73)$$

2) $\alpha < 1$: b^{I} es imaginario; basta hacer $b^{\text{I}} = j\,b^{\text{II}}$ en la ecuación (73). Resulta

$$\Theta = \frac{g}{2K\,jb^{\text{II}}}\, e^{-bt} \left\{ e^{j\,b^{\text{II}}\,t} \int_o^t I\, e^{-(-b+j\,b^{\text{II}})\,t}\, dt - \right.$$

$$\left. - e^{-j\,b^{\text{II}}\,t} \int_o^t I\, e^{-(-b-j\,b^{\text{II}})\,t}\, dt \right\} =$$

$$= \frac{g}{K\,b^{\text{II}}}\, e^{-bt} \left\{ sen\, b^{\text{II}}\,t \int_o^t I\, e^{b\,t} \cos b^{\text{II}} t\, dt - \right.$$

$$\left. - \cos b^{\text{II}} t \int_o^t I\, e^{b\,t}\, sen\, b^{\text{II}} t\, dt \right\} \qquad (74)$$

3) $\alpha = 1$. La solución de la ecuación de movimiento es en este caso

$$\Theta = (M + N\,t)\, e^{-bt} + \frac{g\,e^{-bt}}{K} \left\{ t \int I\, e^{b\,t}\, dt - \int I\,t\, e^{b\,t}\, dt \right\} \qquad (75)$$

Las constantes de integración M y N están determinadas por las condiciones iniciales: al principio de la descarga ($t = 0$) el móvil está en reposo ($\Theta_o = 0$) y su velocidad inicial es nula ($v_o = 0$). Se encuentra

$$M = \frac{g}{K} \left[\int I\,t\, e^{b\,t}\, dt \right]_{t=0} \quad \text{y} \quad N = -\frac{g}{K} \left[\int I\, e^{bt}\, dt \right]_{t=0}$$

de donde resulta el valor de la elongación en un instante cualquiera

$$\Theta = \frac{g}{K}\, e^{-bt} \left\{ t \int_o^t I\, e^{b\,t}\, dt - \int_o^t I\,t\, e^{b\,t}\, dt \right\} \qquad (76)$$

Las ecuaciones (73), (74) y (76) sirven como punto de partida en los casos particulares en que $I(t)$ es una función conocida a partir de los datos del circuito, y tal que la integración sea posible. Veremos más adelante su aplicación al caso de la descarga exponencial $I = I_0 \, e^{-t/\tau}$.

Haciendo sobre la ley de la descarga la única hipótesis de que la duración práctica de la descarga es igual o inferior al tiempo t'_1 que emplea el móvil en alcanzar su primera elongación, es fácil demostrar que la prolongación de la duración de la descarga tiene el efecto de disminuir la sensibilidad y aumentar el tiempo t'_1, y eso cualquiera que sea el grado de amortiguamiento. Vamos a distinguir los siguientes casos según el valor de α:

1) $\alpha > 1$. Transformamos la ecuación (73) haciendo

$$m = \frac{1}{Q} \int_0^{t \geqq t_d} I \, e^{-(-b+b')\,t} \, dt \tag{77}$$

y

$$n = \frac{1}{Q} \int_0^{t \geqq t_d} I \, e^{-(-b-b')\,t} \, dt \tag{78}$$

donde

$$Q = \int_0^{t \geqq t_d} I \, dt \tag{79}$$

m y n son constantes si el límite superior de integración es igual o superior a t_d, porque I es practicamente nulo para $t \geqq t_d$.

Resulta

$$\Theta_{t \geqq t_d} = \frac{g}{2\,b'\,K} \, Q \, e^{-bt} \left\{ m \, e^{b't} - n \, e^{-b't} \right\} \tag{80}$$

Busquemos el tiempo t'_1 (que suponemos mayor o igual que t_d). Se tiene

$$\left(\frac{d\Theta}{dt} \right)_{t=t'_1} = 0$$

de donde

$$t'_1 = \frac{1}{2\,b'} \log_e \frac{n\,(b+b')}{m\,(b-b')} \tag{81}$$

en lugar de

$$t_1 = \frac{1}{2\,b'} \log_e \frac{b+b'}{b-b'}$$

que se obtendría si la descarga fuese instantánea. Se confirma que $t'_1 \geqq t_1$, dado que $n \geqq m$.

Se obtiene la elongación llevando el valor de t'_1 a (80)

$$\Theta_{max} = \frac{g}{2\,b'\,K}\,Q \left\{ \left(\frac{b+b'}{b-b'} \right)^{\frac{-b+b'}{2\,b'}} - \left(\frac{b+b'}{b-b'} \right)^{\frac{-b-b'}{2\,b'}} \right\} n^{\frac{-b+b'}{2\,b'}}\; m^{\frac{b+b'}{2\,b'}} =$$

$$= \frac{g}{K\,w_o}\,Q \left(\frac{b-b'}{b+b'} \right)^{\frac{b}{2\,b'}} n^{\frac{-b+b'}{2\,b'}}\; m^{\frac{b+b'}{2\,b'}}$$

de donde

$$S'_q = S_i\,w_o \left(\frac{b-b'}{b+b'} \right)^{\frac{b}{2\,b'}} n^{\frac{-b+b'}{2\,b'}}\; m^{\frac{b+b'}{2\,b'}} \qquad (82)$$

Si la descarga fuese instantánea, $m = n = 1$, y la sensibilidad tendría por valor, como lo hemos encontrado directamente

$$S_q = S_i\,w_o \left(\frac{b-b'}{b+b'} \right)^{\frac{b}{2\,b'}} \qquad (5\ a)$$

Se verifica que por el hecho de no ser instantánea la descarga, la sensibilidad en cantidad de electricidad se encuentra reducida; el factor de corrección es

$$c = \frac{S'_q}{S_q} = n^{\frac{-b+b'}{2\,b'}}\; m^{\frac{b+b'}{2\,b'}} \qquad (83)$$

La relación (82), bajo una forma más general, obtenida haciendo $v_o \neq 0$ en vez de $v_o = 0$ en el instante inicial, como lo hemos admitido más arriba, se debe a *Dorn*. El interés de considerar el caso de $v_o \neq 0$ aparece al estudiar las correcciones en los métodos de multiplicación y de retroceso, examinados en el

parágrafo 9, en los cuales el móvil pasa por cero con cierta velocidad en el momento de recibir la descarga. Con el fin de simplificar la relación de *Dorn* en vista de su aplicación práctica, *Diesselhorst* la desarrolló en serie, suponiendo pequeño el valor de t_d, para poder limitarse a los tres primeros términos de los desarrollos de las cantidades m y n; se obtienen así relaciones simples, independientes del amortiguamiento, que dan el factor de corrección en diversos casos particulares; p. ej. en la descarga exponencial $I = I_o e^{-t/\tau}$

$$\frac{S'_q}{S_q} = 1 - \frac{1}{2} (\tau w_o)^2 \qquad (84)$$

Los resultados de *Diesselhorst* no presentan interés actualmente; se comparará (84) con los resultados del estudio detallado del caso de la descarga exponencial que haremos más adelante.

2) $\alpha < 1$. La relación (74) se escribe

$$\Theta_{t \geqq t_d} = \frac{g}{K b''} Q e^{-bt} [m \operatorname{sen} b''t - n \cos b''t] \qquad (85)$$

haciendo

$$m = \frac{1}{Q} \int_0^{t \geqq t_d} I e^{bt} \cos b''t \, dt \qquad (77a)$$

y

$$n = \frac{1}{Q} \int_0^{t \geqq t_d} I e^{bt} \operatorname{sen} b''t \, dt \qquad (78a)$$

El instante $t'_1 \geqq t_d$ de la elongación se encuentra haciendo $\left(\frac{d\Theta}{dt} \right)_{t = t'_1} = 0$ de donde se deduce

$$t'_1 = \frac{1}{b''} \operatorname{arctg} \frac{b n + b'' m}{b m - b'' n} = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\lambda n + \pi m}{\lambda m - \pi n} \qquad (86)$$

en vez de

$$t_1 = \frac{1}{b''} \operatorname{arctg} \frac{b''}{b}$$

que se obtendría si la descarga fuera instantánea.

Llevemos el valor de t'_1 a (85); obtenemos la elongación

$$\Theta_{max} = \frac{g Q}{K w_o} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\lambda n + \pi m}{\lambda m - \pi n}} \sqrt{m^2 + n^2}$$

de donde

$$S'_q = S_i\, w_o\, e^{-\frac{\lambda}{\pi} arctg \frac{\lambda n + \pi m}{\lambda m - \pi n}} \sqrt{m^2 + n^2} \qquad (87)$$

Si la descarga fuese instantánea, $m = 1$ y $n = 0$, y la sensibilidad tendría por valor

$$S_q = S_i\, w_o\, e^{-\frac{\lambda}{\pi} arctg \frac{\pi}{\lambda}} \qquad (5c)$$

El factor de corrección es por consiguiente

$$c = \frac{S'_q}{S_q} = \sqrt{m^2 + n^2}\; e^{-\frac{\lambda}{\pi} arctg \frac{n}{m}} \qquad (88)$$

3) $\alpha = 1$. La relación (76) se escribe

$$\Theta_{t \geqq t_d} = \frac{g}{K} Q\, e^{-bt} [t\, m - n] \qquad (89)$$

haciendo

$$m = \frac{1}{Q} \int_0^{t \geqq t_d} I e^{bt} dt \qquad (77b)$$

y

$$n = \frac{1}{Q} \int_0^{t \geqq t_d} I t\, e^{bt} dt \qquad (78b)$$

El instante $t'_1 \geqq t_d$ en que se produce la elongación está definido por la condición $\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_{t=t_1} = 0$, de donde

$$t'_1 = \frac{m + b\, n}{b\, m} \qquad (90)$$

y, sustituyendo en (89)

$$\Theta_{max} = \frac{g\, Q}{K\, b}\, m\, e^{-\frac{m + b\, n}{m}}$$

de donde

$$S'_q = S_i\, w_o \frac{1}{e}\, m\, e^{-\frac{bn}{m}} \qquad (91)$$

Si la descarga fuese instantánea se tendría $m = 1$ y $n = 0$

$$t_1 = \frac{1}{b} = \frac{1}{w_o}$$

y

$$S_q = S_i \, w_o \, \frac{1}{e}$$

El factor de corrección es por consiguiente

$$c = \frac{S'_q}{S_q} = m \, e^{-b \frac{n}{m}} \tag{92}$$

Es interesante poder calcular de antemano el factor de corrección c o el error relativo

$$\varepsilon = \frac{S_q - S'_q}{S_q} = 1 - c \tag{93}$$

Hay que distinguir dos casos :

1) la ley $I(t)$, que se puede determinar a partir de los datos del circuito, es tal que las expresiones (73), (74) y (76) son integrables ;

2) la ley $I(t)$ es desconocida: es el caso de las descargas capacitivas cuando los dieléctricos no se pueden considerar perfectos y de las descargas inductivas cuando las bobinas contienen núcleos ferromagnéticos .

Se puede ver que el segundo caso no es interesante, si bien algunos autores indican el cálculo de la corrección basándose en la obtención por el oscilógrafo de la curva $I(t)$. Al registrar dicha curva hay que tomar ciertas precauciones, porque I no es la corriente real en el galvanómetro sino la corriente que habría atravesado el circuito si el galvanómetro no introdujese fuerza contraelectromotriz. Por consiguiente, si esta última no es despreciable, será necesario, suponiendo el oscilógrafo en serie con el galvanómetro, sea bloquear el órgano móvil de este último, sea reemplazar el galvanómetro por una resistencia equivalente . En ciertas descargas inductivas, si la f.e.m. inducida en la bobina de prueba unida al balístico no es suficiente, a causa de la menor sensibilidad del oscilógrafo , se puede disponer una segunda bobina de prueba, de mayor número de espiras, que se unirá al oscilógrafo solo. Una vez registrada la curva $I(t)$ se recomienda a veces trazar las curvas suplementarias

$$I e^{-(-b+b')t}(t) \quad \text{y} \quad I e^{-(-b-b')t}(t) \quad \text{si } \alpha > 1$$

$$I e^{bt} \cos b''t\,(t) \quad \text{y} \quad I e^{bt} \operatorname{sen} b''t\,(t) \quad \text{si } \alpha < 1$$

$$\text{y} \quad I e^{bt}(t) \quad \text{y} \quad I t e^{bt}(t) \quad \text{si } \alpha = 1$$

El planimetrado de la curva $I\,(t)$ y de las otras dos, elegidas según el valor de α, permite determinar m y n y por consiguiente c, aplicando (83), (88) o (92), y ε, a partir de (93).

Observemos primero que el trazado de las curvas suplementarias puede evitarse: el planimetrado de $I\,(t)$ da Q y la medida del Θ_{max} correspondiente determina S'_q; por otra parte S_q se conoce porque para un aparato dado sólo es función del grado de amortiguamiento α; entonces el cálculo directo de c y de ε es inmediato.

Pero hay más: por el hecho de haber determinado Q por planimetrado de $I\,(t)$, la medida balística se hace inútil; su único interés residiría en darnos una idea del error que se cometería suponiendo la descarga instantánea, pero el valor encontrado no es interesante por no ser más válido cuando cambian las condiciones del ensayo, especialmente la corriente en las bobinas o la d.d.p. en los bornes del condensador.

El problema se presenta de manera diferente en las condiciones del 1er caso, o sea cuando la ley $I\,(t)$ se puede determinar y las expresiones de S'_q son integrables. El cálculo podrá así hacerse p. ej. en el caso de varias descargas prácticamente instantáneas que se suceden a intervalos de tiempo finitos, en el caso de una descarga rectangular de corta duración, $I = Cte$, en el caso en que la corriente es de la forma $I = I_0 e^{-t/\tau}$ (carga y descarga de un condensador perfecto en un circuito no inductivo) y aún en el caso en que $I = I_0 (e^{-At} - e^{-Bt})$ (p. ej. carga y descarga aperiódicas de un condensador en un circuito de self no despreciable o descarga por inducción mutua de acuerdo con lo visto en el parágrafo 4). El cálculo es simple en los tres primeros casos citados, más complicado en el cuarto.

Vamos a examinar a título de ejemplo, y a partir de las ecua-

ciones generales, el caso en que la corriente varía según la ley $I = I_o\, e^{-t/\tau}$ (*Worthing*).

Supongamos primero $\alpha > 1$. La integración de la ecuación (73) da inmediatamente

$$\Theta = \frac{g}{2\,b'K}\,\tau\,I_o \left\{ \frac{e^{(-b+b')\,t}}{1+\tau(-b+b')} - \frac{e^{(-b-b')\,t}}{1+\tau(-b-b')} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\,\tau\,b'\,e^{-t/\tau}}{[1+\tau(-b+b')]\;[1+\tau(-b-b')]} \right\} \tag{94}$$

El instante t'_1 de la elongación está definido por la condición

$$\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_{t=t'_1} = 0 = \frac{g}{2\,b'K}\,\tau\,I_o \left\{ \frac{(-b+b')\,e^{(-b+b')\,t'_1}}{1+\tau(-b+b')} - \right.$$

$$\left. - \frac{(-b-b')\,e^{(-b-b')\,t'_1}}{1+\tau(-b-b')} - \frac{2\,b'\,e^{-t'_1/\tau}}{[1+\tau(-b+b')]\;[1+\tau(-b-b')]} \right\} \tag{95}$$

Multipliquemos por τ la ecuación (95), y sumémosla a la ecuación (94) en la que hacemos $t = t'_1$, $\Theta = \Theta_{max}$; resulta

$$\Theta_{max} = \frac{S_i\,w_o^{\,2}}{b'}\,\tau\,I_o\,e^{-bt'_1}\,sh\,b't'_1 \tag{96}$$

Pero $\tau\,I_o = Q$; en efecto

$$Q = \int_0^{\infty} I_o\,e^{-t/\tau}\,dt = \tau\,I_o \tag{97}$$

de modo que

$$S'_q = \frac{\Theta_{max}}{Q} = S_i\,w_o\,\frac{w_o}{b'}\,e^{-bt'_1}\,sh\,b't'_1 \tag{98}$$

En el caso de la descarga instantánea se tenía

o sea

$$S_q = S_i\, w_o\, e^{-bt_1} \qquad (5)$$

$$\frac{S'_q}{S_q} = \frac{w_o}{b'}\, e^{b t_1 \left(1 - \frac{t'_1}{t_1}\right)} \; sh\left(b' t_1 \frac{t'_1}{t_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \times$$

$$\times\, e^{\left(1 - \frac{t'_1}{t_1}\right) \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\, arcth \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha}} \; sh\left(\frac{t'_1}{t_1}\, arcth \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha}\right) \qquad (99)$$

Supongamos ahora $\alpha < 1$. El cálculo de S'_q es inmediato, basta reemplazar b' por jb'' en (98); resulta

$$S'_q = S_i\, w_o\, \frac{w_o}{b''}\, e^{-bt'_1}\, sen\, b'' t'_1 \qquad (100)$$

en lugar de la relación (5) que se tendría si la descarga hubiese sido instantánea. Se obtiene

$$\frac{S'_q}{S_q} = \frac{w_o}{b''}\, e^{b t_1 \left(1 - \frac{t'_1}{t_1}\right)} \; sen\left(b'' t_1 \frac{t'_1}{t_1}\right) = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}} \times$$

$$\times\, e^{\left(1 - \frac{t'_1}{t_1}\right) \frac{\lambda}{\pi}\, arctg \frac{\pi}{\lambda}} \; sen\left(\frac{t'_1}{t_1}\, arctg \frac{\pi}{\lambda}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \times$$

$$\times\, e^{\left(1 - \frac{t'_1}{t_1}\right) \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}\, arctg \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}} \; sen\left(\frac{t'_1}{t_1}\, arctg \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}\right) \qquad (101)$$

En particular para $\lambda = \alpha = 0$

$$\frac{S'_q}{S_q} = sen \frac{t'_1}{t_1} \frac{\pi}{2} = sen \frac{2\pi t'_1}{T_o} \qquad (102)$$

La relación que da t'_1 se obtiene haciendo $b' = jb''$ en (95); resulta después de transformaciones

$$e^{-\left(\frac{1}{\tau}-b\right)t'_l} = \cos b'' t'_l + \frac{\tau w_o^{\,2}-b}{b''} \operatorname{sen} b'' t'_l \qquad (103)$$

Nos queda por considerar el caso en que $\alpha = 1$. La integración de (76) da inmediatamente

$$\Theta = \frac{g}{K} Q \frac{1}{1-\tau b} e^{-bt} \left\{ t - \tau \frac{1 - e^{\left(b-\frac{1}{\tau}\right)t}}{1-\tau b} \right\} \qquad (104)$$

El instante t'_l de la elongación está dado por

$$\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_{t=t'_l} = o = \frac{1 - e^{\left(b-\frac{1}{\tau}\right)t'_l}}{1-\tau b} - b\,t'_l \qquad (105)$$

Combinando (104) y (105) resulta

$$\frac{\Theta_{max}}{Q} = S'_q = S_i\, w_o\, e^{-b\,t'_l}\, b\,t'_l \qquad (106)$$

Si la descarga fuese instantánea se tendría

$$S_q = S_i\, w_o\, \frac{1}{e} \qquad (56)$$

de donde

$$\frac{S'_q}{S_q} = e^{1-b\,t'_l}\, b\,t'_l = \frac{t'_l}{t_l}\, e^{1-\frac{t'_l}{t_l}} \qquad (107)$$

Las relaciones (99), (101) y (107) permiten trazar las curvas $\frac{S'_q}{S_q}\left(\frac{t'_l}{t_l}\right)$ para diversos valores de α; el interés de estas curvas es evidente. En efecto, al hacer la medida de Θ_{max} se puede igualmente medir t'_l; por otra parte, como se conoce α en las condiciones de la experiencia, se calcula t_l a partir de las relaciones (73), (75) y (77) del capítulo I o se determina por un ensayo especial; se forma $\frac{t'_l}{t_l}$ y se encuentra $\frac{S'_q}{S_q}$ sobre la curva

correspondiente: se obtiene así el factor de corrección de la sensibilidad relativa al caso de la descarga instantánea. En la fig. 17 hemos dado las curvas $\frac{S'_q}{S_q}\left(\frac{t'_1}{t_1}\right)$ para los valores del parámetro α comprendidos entre 0 y 6.

De manera general, cualquiera que sea el circuito, es conveniente hacer la determinación de $\frac{t'_1}{t_1}$ si hay dudas sobre la validez de la hipótesis fundamental de que la descarga ha terminado practicamente cuando empieza el movimiento; si la hipótesis es válida, $\frac{t'_1}{t_1}$, valor que desgraciadamente no puede ser evaluado

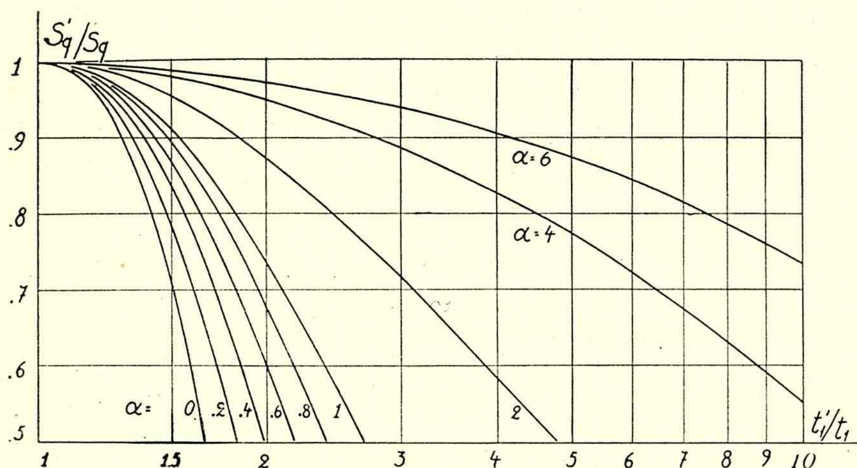


Fig. 17

con gran precisión ya sea por errores de medida o porque las relaciones que dan t_1 corresponden al caso ideal del movimiento, tiene que confundirse con la unidad.

También se pueden trazar de antemano las curvas $\frac{t'_1}{t_1}\left(\frac{1}{\tau w_o}\right)$, a partir de las ecuaciones (95), (103) y (105) y finalmente las curvas $\frac{S'_q}{S_q}\left(\frac{1}{\tau w_o}\right)$. El trabajo es penoso; el lector encontrará dichas curvas en los artículos de *Lucchi*, así como las curvas correspondientes al estudio análogo de la descarga rectangular y de la descarga en que la corriente es de la forma $I=I_o\left(e^{-At}-e^{-Bt}\right)$;

en este último caso solamente para $\alpha = 1$, pero para diversos valores de la relación $\frac{B}{A}$, comprendidos entre 2 y 100.

Las curvas $\frac{S'_q}{S_q}\left(\frac{1}{\tau w_0}\right)$ con α como parámetro permiten resolver ciertos problemas interesantes. Así se puede plantear el problema de qué grado de amortiguamiento elegir para que la corrección a efectuar sea mínima en una medida dada (τw_0 conocido). No se puede dar ninguna regla porque dichas curvas, para diversos valores de α, se cortan entre sí; por otra parte no hay que olvidarse de que para fijar α intervienen otras condiciones, especialmente el valor de la sensibilidad S_q (V 4).

El hecho de que la corrección no siempre crece con α puede sorprender a primera vista. En efecto, la hipótesis de la descarga instantánea parece verificarse tanto mejor cuanto mayor es el tiempo que emplea el móvil en alcanzar la elongación, o sea — si la descarga es prácticamente instantánea — cuanto menor es α. Ahora bien, en el caso de la descarga prolongada, a igualdad de τw_0, $\frac{t'_1}{t_1}$ aumenta fuertemente con α y en definitiva un valor superior de α puede dar una corrección menor.

Un problema más importante que se puede resolver a partir de las curvas $\frac{S'_q}{S_q}\left(\frac{1}{\tau w_0}\right)$ es la determinación previa de si la descarga puede considerarse instantánea en un circuito dado y con un galvanómetro dado. Ya hablamos de esta aplicación en el parágrafo 4, donde indicamos que, de acuerdo con los cálculos de *Lucchi*, para que el error sobre la sensibilidad sea inferior a 0,1 °/₀₀, basta que $\frac{\tau}{T_0}$ sea inferior o igual a 0,005, y eso cualquiera que sea el valor de α entre 0 y 10. Agreguemos ahora que para que el error sea inferior a 1 °/₀₀, $\frac{\tau}{T_0}$ debe ser inferior a 0,017 para $\alpha = 0$, valor que disminuye progresivamente cuando α aumenta, alcanzando 0,015 para $\alpha = 10$; finalmente, para que el error sea inferior a 5 °/₀₀, $\frac{\tau}{T_0}$ debe ser inferior a 0,052 para $\alpha = 0$, pasa por un mínimo de 0,04 para $\alpha = 4$ y alcanza 0,051 para $\alpha = 10$.

A nuestro juicio esta determinación es el resultado más inte-

resante del estudio hecho en este parágrafo, ya que decide sobre la conveniencia de la aplicación del método. En efecto, cuando no es posible la elección del aparato y de los elementos del circuito de manera que la descarga pueda considerarse instantánea, aún en el caso en que la corrección sea calculable, el empleo del balístico deja de ser interesante, por una parte porque la ventaja del método balístico consiste en su rapidez y facilidad de aplicación y de cálculo, y por otra parte porque, como ya notamos, la determinación de la corrección no puede ser muy exacta. En el caso de la aplicación más interesante del balístico, a saber, la medida del flujo en las bobinas con núcleo ferromagnético, se sustituye el balístico por el fluxímetro cuando la duración de la descarga se hace importante.

11. Fluxímetro. — Según el vocabulario electrotécnico internacional, el fluxímetro es el aparato que sirve para medir una variación de flujo magnético y que está constituído por un galvanómetro de cuadro móvil y campo radial, cuyo par director es insignificante y cuyo par de amortiguamiento es muy grande. Volveremos sobre esta condición del par de amortiguamiento.

El aparato se debe a *Grassot*; vamos a ver que goza de propiedades interesantes en las descargas inductivas, particularmente en el caso de los circuitos con núcleo ferromagnético.

La ecuación de movimiento de un galvanómetro de cuadro, de campo radial y de par director nulo, es

$$K \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \left(A_o + \frac{\Phi_o{}^2}{R} \right) \frac{d\Theta}{dt} = \Phi_o I \qquad (108)$$

Consideremos el aparato conectado directamente o a través de una resistencia en serie, a los bornes de una bobina atravesada por un flujo constante (o nulo); R designa la resistencia total del circuito del fluxímetro. Designemos por t_1 el instante en que se inicia la variación $\triangle \psi$ del flujo a través de la bobina; en este instante el cuadro se encuentra en reposo en una posición Θ_1. Una corriente I, que se origina a causa de dicha variación de flujo, atraviesa el cuadro, que desvía; en un instante t_d el flujo se ha establecido prácticamente en su nuevo valor y la corriente vuelve a ser nula: en ausencia de par motor, el cuadro se detiene por acción del par de amortiguamiento; sea t_2 el instante de la detención y Θ_2 la nueva posición de equilibrio del cuadro. Integremos la ecuación de movimiento entre t_1 y t_2:

$$K \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2\Theta}{dt^2} dt + \left(A_o + \frac{\Phi_o^{\,2}}{R} \right) \int_{t_1}^{t_2} d\Theta = \Phi_o \int_{t_1}^{t_2} i\, dt$$

o sea

$$K \left[\frac{d\Theta}{dt} \right]_{t_1}^{t_2} + \left(A_o + \frac{\Phi_o^{\,2}}{R} \right) \left[\Theta \right]_{t_1}^{t_2} = \Phi_o Q$$

y como $\frac{d\Theta}{dt} = 0$ en los instantes t_1 y t_2, resulta

$$\left(A_o + \frac{\Phi_o^{\,2}}{R} \right) (\Theta_2 - \Theta_1) = \Phi_o Q = \Phi_o \frac{\Delta \psi}{R} \qquad (109)$$

Llamemos Θ_{max} a la desviación $\Theta_2 - \Theta_1$; la sensibilidad en flujo se escribe

$$S_f = \frac{\Theta_{max}}{\Delta \psi} = \frac{1}{\Phi_o + \frac{A_o R}{\Phi_o}} \qquad (110)$$

Si, como ocurre frecuentemente, el coeficiente de amortiguamiento A_o por el aire y el frotamiento de los pivotes (cuadro con pivotes) o la histéresis elástica (cuadro suspendido) es despreciable frente al coeficiente de amortiguamiento electromagnético $\frac{\Phi_o^{\,2}}{R}$, resulta

$$S_f = \frac{1}{\Phi_o} \qquad (111)$$

de lo que se deduce la primera ventaja del aparato : la sensibilidad en flujo es independiente de la resistencia del circuito del fluxímetro; el aparato se puede graduar directamente en unidades de flujo, y la graduación es válida para cualquier resistencia , siempre que el amortiguamiento electromagnético sea grande con respecto al amortiguamiento en circuito abierto; es esta condición, de preferencia a la de "par de amortiguamiento elevado", la que debería figurar en la definición.

Pero hay más. En efecto, el movimiento termina siempre después de pasada la descarga: $t_2 > t_d$, de manera que considerando la relación (83), relativa a la influencia de la duración de la descarga sobre la sensibilidad del balístico, se puede escribir (movimiento aperiódico, ya que $C = 0$, o sea $b = b'$) :

$$c = n^{\frac{-b+b'}{2b'}} \; m^{\frac{b+b'}{2b'}} = n^{0} \; m^{1} = 1$$

porque

$$m = \frac{1}{Q} \int_{0}^{t_2 \geqq t_d} I e^{-(-b+b')\, t} \, dt = \frac{1}{Q} \int_{0}^{t_2 \geqq t_d} I \, dt = 1$$

Resulta que cualesquiera que sean las características y condiciones de empleo del aparato, la sensibilidad, siempre que $C = 0$, es independiente de la duración de la descarga. Como ésta no interviene, se deben volver a encontrar las relaciones (110) y (111) también en el caso de la descarga instantánea, o sea cuando el móvil está lanzado con la velocidad

$$v_0 = \frac{\Phi_0}{K} Q = \frac{\Phi_0}{K} \frac{\Delta \psi}{R}$$

La ecuación de movimiento es entonces (ver el capítulo I 5, caso particular $C = 0$):

$$\Theta = \frac{v_0}{2b} \left(1 - e^{-2bt} \right)$$

y la desviación total es

$$\Theta_{max} = \frac{v_0}{2b} = \frac{\Phi_0}{A_0 + \frac{\Phi_0^{\,2}}{R}} \frac{\Delta \psi}{R}$$

de donde se deduce inmediatamente

$$S_f = \frac{\Theta_{max}}{\Delta \psi} = \frac{\Phi_0}{\left(A_0 + \frac{\Phi_0^{\,2}}{R} \right) R} \cong \frac{1}{\Phi_0}$$

Se puede construir el aparato suspendiendo el cuadro a un hilo sin torsión y llevando la corriente por dos espirales de hilo fino de plata recocida, que no ejercen par apreciable. Existen también modelos de pivotes. Una horquilla permite llevar al cero la aguja, que está en equilibrio indiferente en todas las posiciones del cuadro. El aparato es de uso industrial cómodo, y se emplea especialmente en los ensayos magnéticos del hierro; el error puede ser inferior a 1 %, pero la sensibilidad es generalmente bastante

pequeña, 10^3 o 10^4 maxwell (o sea 10^{-5} o 10^{-4} weber) por división.

En ciertos aparatos el par director, aunque pequeño, es suficiente para llevar lentamente el cuadro al cero; es necesario entonces efectuar una corrección en la expresión de la sensibilidad. El cálculo se simplifica si se admite que el factor de corrección $c = 1$, es decir, que la sensibilidad del aparato es independiente de la duración de la descarga, lo que es bastante cierto si C es suficientemente pequeño. Con esta hipótesis se puede utilizar la relación (5a) del balístico, establecida en el caso de la descarga instantánea. Como $w_o = \sqrt{\frac{C}{K}}$ es pequeño, se puede introducir la simplificación

$$\sqrt{\alpha^2 - 1} \cong \alpha - \frac{1}{2\alpha}$$

y resulta

$$S_q = \frac{\Phi_o}{K w_o} \left(\frac{1}{4\alpha^2 - 1} \right)^{\frac{\alpha^2}{2\alpha^2 - 1}} = \frac{\Phi_o}{A_o + \frac{\Phi_o{}^2}{R}} 2\alpha \left(\frac{1}{4\alpha^2 - 1} \right)^{\frac{\alpha^2}{2\alpha^2 - 1}}$$

de donde se deduce

$$S_f = \frac{1}{\Phi_o + \frac{A_o R}{\Phi_o}} \beta \qquad (112)$$

siendo

$$\beta = 2\alpha \left(\frac{1}{4\alpha^2 - 1} \right)^{\frac{\alpha^2}{2\alpha^2 - 1}} \qquad (113)$$

Cuando $C = 0$, resulta $\alpha = \infty$ y $\beta = 1$, y se vuelve a la relación (110). El término correctivo β depende únicamente del grado de amortiguamiento, o sea de la resistencia del circuito del fluxímetro, porque

$$\alpha = \alpha_o + \frac{\Phi_o{}^2}{R} \cong \frac{\Phi_o{}^2}{R}$$

para pequeños valores de R.

Gracias a las relaciones (113) y (112) se pueden trazar $\beta(R)$ y $S_f(R)$, es decir, una curva de calibrado del aparato más correcta (*Surugne*); sin embargo, su validez depende de la restric-

ción que hemos hecho de que el factor de corrección c sea suficientemente próximo a la unidad.

12. Shuntado del fluxímetro. — Despreciemos el coeficiente de self inducción de las diversas partes del circuito de la fig. 18 y designemos por I e I_f las corrientes realmente existentes en las ramas. Las ecuaciones son

$$E - R\,I = R_s\,(I - I_f) = R_f\,I_f + \Phi_o \frac{d\Theta}{dt} \qquad (114)$$

$$K \frac{d^2\Theta}{dt^2} + A_o \frac{d\Theta}{dt} = \Phi_o\, I_f \qquad (115)$$

La eliminación de I y de I_f da

$$K \frac{d^2\Theta}{dt^2} + \left[A_o + \frac{\Phi_o^{\,2}\left(1 + \frac{R}{R_s}\right)}{R + R_f\left(1 + \frac{R}{R_s}\right)} \right] \frac{d\Theta}{dt} = \frac{\Phi_o}{R + R_f\left(1 + \frac{R}{R_s}\right)} E \qquad (116)$$

La integración para la duración del movimiento, superior a la de la descarga, da, haciendo las lecturas cuando se detiene el aparato y despreciando el amortiguamiento en circuito abierto frente al electromagnético

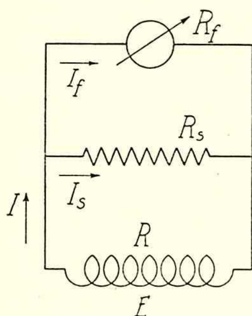


Fig. 18

$$\Phi_o \left(1 + \frac{R}{R_s}\right)(\Theta_2 - \Theta_1) = \int E\,dt = \triangle\psi \; (117)$$

Por el hecho del shuntado la sensibilidad del fluxímetro se reduce $1 + \frac{R}{R_s}$ veces.

Una aplicación particular del fluxímetro shuntado consiste en la medida de las cantidades de electricidad que atraviesan el circuito durante un tiempo apreciable, p. ej. de algunos segundos, pero demasiado corto para que se pueda aplicar el contador de cantidad (*Golding*). Se dispone entonces el fluxímetro con un conmutador (fig. 19) que permite colocarlo sea en los bornes de un shunt, sea en corto circuito; en esta última posición la acción del amortiguamiento electromagnético detiene bruscamente el órgano móvil. Antes de la medida el fluxímetro está en corto circuito; se inicia la medida colocando el aparato en los bornes del shunt (instante t_1), y se lo

mantiene en esa posición durante el tiempo en el que se quiere medir la cantidad de electricidad; transcurrido éste, se vuelve a poner el fluxímetro en corto circuito (instante t_2). Despreciemos los coeficientes de self del shunt y del fluxímetro; resulta

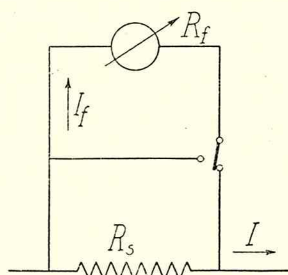


Fig. 19

$$R_f\, I_f + \Phi_0 \frac{d\Theta}{dt} = R_s\, (I - I_f) \cong R_s\, I \qquad (118)$$

despreciando I_f frente a I, lo que es admisible si el valor del shunt es suficientemente pequeño. Se deduce

$$I_f = \frac{1}{R_f}\left(R_s\, I - \Phi_0 \frac{d\Theta}{dt} \right) \qquad (119)$$

Llevando este valor a la ecuación de movimiento (115) e integrando entre t_1 y t_2, resulta

$$\left(A_0 + \frac{\Phi_0{}^2}{R_f} \right) (\Theta_2 - \Theta_1) = \Phi_0 \frac{R_s}{R_f} \int_{t_1}^{t_2} I\, dt$$

A_0 es despreciable frente a $\frac{\Phi_0{}^2}{R_f}$, de manera que finalmente se tiene

$$\int_{t_1}^{t_2} I\, dt = \frac{\Phi_0}{R_s} (\Theta_2 - \Theta_1) \qquad (120)$$

13. Métodos diferenciales en el fluxímetro y en el balístico. — El empleo del balístico como aparato de cero no necesita ningún comentario si las descargas son simultáneas e instantáneas. Pero decir descarga instantánea es decir que la desviación del móvil durante la descarga es despreciable frente a la elongación, y nosotros queremos anular esta última. Por lo tanto hay interés a veces en emplear el fluxímetro: si las descargas no son ni simultáneas ni instantáneas la aguja del fluxímetro, efectúa un trayecto más o menos complicado, pero vuelve a la posición de partida si las dos variaciones de flujo son iguales.

Sin embargo el empleo del fluxímetro es limitado, porque su sensibilidad es bastante pequeña, y se trata de utilizar el balístico. *Dupouy* indica que es tal vez preferible no intentar realizar la igualdad de la cantidad de electricidad Q_1 incógnita con la

Q_2 que sirve de comparación, sino conservar cierto desequilibrio haciendo primero $Q_2 = Q'_2 > Q_1$ y después $Q_2 = Q''_2 < Q_1$, desequilibrio suficiente para que el aparato acuse elongaciones notables Θ_1 y Θ_2, una en sentido inverso de la otra. Si el aparato es sensible, Q''_2 difiere poco de Q'_1 y se puede deducir la cantidad de electricidad Q_2 correspondiente al equilibrio por partes proporcionales; en particular si se hace $\Theta_1 = -\Theta_2$, se tiene

$$Q_1 = \frac{Q'_2 + Q''_2}{2}$$

14. Escala fotobalística de A. Guillet.— La medida de una cantidad de electricidad se reduce en el balístico a la medida de una elongación y en el fluxímetro a la medida de una desviación permanente; *Guillet* observó que se puede obtener Q por medida directa de la velocidad angular comunicada v_0. Para eso sustituye la escala ordinaria por una escala circular fotobalística (que puso a punto para utilizar con su cuadro adinámico), donde la iluminación permanente del índice de la escala está reemplazada por una iluminación periódica de frecuencia constante y conocida f. Cuando el cuadro gira, su espejo envía sobre la escala un punto o una hendidura luminosa a intervalos de tiempo iguales a $\triangle t = \frac{1}{f}$; sea $\triangle s$ la distancia que separa dos imágenes sucesivas del índice; la velocidad angular media relativa a un intervalo es $w_{med} = \frac{1}{D} \frac{\triangle s}{\triangle t}$; donde D es la distancia del espejo a la escala. La periodicidad de la iluminación se obtiene p. ej. con ayuda de un arco, o mejor de un diapasón cuyos brazos llevan plaquetas con orificios y dejan pasar la luz sólo cuando los brazos vibrantes pasan por la posición de equilibrio. Se opera por registro fotográfico porque la frecuencia de iluminación es grande; la regla que soporta el film puede adaptarse al galvanómetro o al fluxímetro. Evidentemente la complicación del dispositivo le resta interés en los ensayos corrientes.

15. Wattímetro balístico. — Diremos aquí algunas palabras sobre este tema, dada su relación evidente con el galvanómetro balístico. En un wattímetro el par motor es proporcional a la potencia y la ecuación de movimiento se escribe

$$K \frac{d^2\Theta}{dt^2} + A \frac{d\Theta}{dt} + C\Theta = g\,P \qquad (121)$$

Supongamos que g no depende de Θ; si hacemos pasar una energía instantánea W por el aparato, admitiendo que el móvil no se haya movido durante la descarga, la integración de (121) da

$$K\,v_0 = g \int P\,dt = g\,W$$

De acuerdo con la ecuación (5), la elongación Θ_{max} es proporcional a v_0 y por consiguiente mide W. La calibración experimental del aparato se hace fácilmente enviando una corriente constante a uno de los enrollamientos del electrodinamómetro (ver el capítulo IX) y una descarga conocida (p. ej. la de un condensador) al otro. *Rich y Hatfield* han puesto así a punto un aparato, construído por la General Electric Co., que permite hacer algunas medidas interesantes, p. ej. la de la energía gastada en el arco que se forma al abrir un interruptor: basta montar un enrollamiento poco resistente en serie y otro muy resistente en paralelo con el interruptor.

En realidad, si la descarga no se puede considerar instantánea, el problema se complica, porque las elongaciones medidas exigen correcciones; el estudio es análogo al que hemos hecho en el parágrafo 10.

BIBLIOGRAFÍA

1. **R. Bellasio** — *Elettrotecnica,* t. 24, p. 501, 1937.
2. **H. Chaumat** — *C. R. Acad. Sc.* t. 174. p. 32 y 155, 1922 o *R. G. E.* t. 11, p. 115 y 155, 1922.
3. **H. Diesselhorst** — *Ann. der Phys.* t. 9, p. 712, 1902.
4. **E. Dorn** — *Ann. der Phys.* t. 17, p. 654, 1882.
5. **G. Dupouy** — *C. R. Acad. Sc.* t. 203, p. 987, 1936 o *R. G. E.* t. 41, p. 9, 1937.
6. **S. Gerszonowicz** — *Rev. Electr.* t. 27, p. 89, 1941.
7. **D. Maggiolo de Gerszonowicz y S. Gerszonowicz** — *Bol. Fac. Ing. Montevideo* N.° 9, p. 496, 1940, *Rev. Electr.* t. 27, p. 23, 1941 o *Rev. Sci. Instr.* t. 12, p. 98, 1941.
8. **E. W. Golding** — *Journ. Inst. electr. Engin.* t. 76, p. 113, 1935 o *R. G. E.* t. 38, p. 432, 1935.
9. **M. E. Grassot** — *Journ. de Phys.* t. 3, p. 696, 1904.
10. **A. Guillet** — *Bull. Soc. Fr. Phys.* N.° 278, p. 82, s.85, 1929 o *R. G. E.* t. 26, p. 187, 1929.
11. **P. E. Klopsteg** — *Phys. Rev.* t. 7, p. 640, 1916
12. **I. Lucchi** — *Elettrotecnica,* t. 20, p. 603, 1933 y t. 22, p. 20 y 747, 1935.
13. **M. Masius** — *Phys. Rev.* t. 25, p. 211, 1925 o *R. G. E.* t. 17, p. 674, 1925.
14. **T. A. Rich** — *G. E. R.* t. 40, p. 583, 1937.
15. **T. A. Rich y E. J. Hatfield, Jr** — *G. E. R.* t. 41, p. 288, 1938.
16. **A. Russell** — *Phil Mag.* 12, 1906.
17. **J. Surugue** — *Journ. de Phys.* t. 6, p. 486, 1935.
18. **W. Weber** — Werke, t. 3, p. 438 y 441 — Springer, Berlin, 1893.
19. **A. G. Worthing** — *Phys. Rev.* t. 6, p. 165, 1915.
20. **A. Zeleny** — *Phys. Rev.* t. 23, p. 399, 1906.

CAPITULO VI.

Determinación experimental de las constantes y características del galvanómetro de cuadro móvil.

1. Generalidades. — En el estudio efectuado en los capítulos precedentes hemos admitido ciertas aproximaciones, necesarias para permitir el análisis matemático del problema. Así, hemos supuesto que el sistema tenía un solo grado de libertad, es decir, que sólo era susceptible de rotación alrededor de su eje; que el coeficiente de amortiguamiento y los pares motor y director unitario eran constantes, independientes del ángulo de rotación o de sus derivadas con respecto al tiempo, lo que a su vez exigía ciertas hipótesis, como por ejemplo la del campo radial de intensidad constante, etc.

Los galvanómetros reales no cumplen exactamente esas hipótesis, y los resultados del estudio experimental difieren más o menos de los del estudio teórico. En los aparatos de buena calidad los resultados experimentales se aproximan mucho a los teóricos, pero antes de poder utilizar con suficiente seguridad un galvanómetro dado, hay que estudiarlo experimentalmente con mucha detención.

El estudio del movimiento, la determinación de las sensibilidades, etc, exigen que podamos enviar al galvanómetro, sea una corriente determinada, de valor y sentido variable a voluntad, sea una cantidad de electricidad determinada, igualmente regulable en valor y sentido; además debemos poder variar el amortiguamiento del aparato.

En el primer caso emplearemos los esquemas de las fig. 6a o 6b; en el segundo los de las fig. 7 o 8, según que sea más cómodo

emplear la descarga capacitiva o la inductiva; en algunos casos particulares será necesario recurrir a llaves o dispositivos especiales para abrir el circuito después de terminada la descarga pero antes de que empiece el movimiento (ver el capítulo **V, 3,7**).

En lo que sigue supondremos que el galvanómetro ha sido sustraído a las vibraciones mecánicas (ver el capítulo **IV, 17**).

Las variaciones de temperatura no tienen importancia práctica si no sobrepasan $\pm$ 10° C (ver el capítulo **III, 3,4**).

Debe prestarse particular atención a los efectos termoeléctricos, al aislamiento de la fuente y de los aparatos y a la nivelación del galvanómetro.

2. Invariabilidad del cero y de las desviaciones. — Se envía al aparato, colocado en condiciones de amortiguamiento próximas al crítico, una corriente permanente I que se mantiene durante un intervalo de tiempo Δt. Se interrumpe la corriente y se observa el comportamiento del cero para diversos valores de I en orden creciente primero y decreciente después, siempre con el mismo sentido de pasaje de la corriente. Se verifica si al imprimir al órgano móvil una desviación previa suficiente, el cero es estable para desviaciones ulteriores inferiores a la primera y del mismo sentido que ella. Se repite el estudio para distintos valores de Δt y con desviaciones en ambos sentidos. Se estudia después la influencia de las inversiones sobre la posición del cero y, finalmente, se constata la influencia del campo magnético sobre el cero, desplazando el shunt magnético si el aparato lo posee, o, en caso contrario, improvisando un shunt con una barra de acero dulce de sección suficiente. De acuerdo con lo que hemos visto en el capítulo **III, 1,4**, la elasticidad imperfecta de los hilos de suspensión y las impurezas ferromagnéticas del cuadro colocado en un campo imperfectamente radial, hacen que el órgano móvil no vuelva exactamente al cero después de suprimir la corriente: hay "viscosidad" y "juego". Estas imperfecciones, puestas en evidencia por el estudio del cero, afectan no solamente la posición de éste sino también la desviación relativa a una corriente dada, que depende del valor de la desviación anterior, el grado de amortiguamiento, etc. Así el grado de amortiguamiento en circuito abierto es función de la desviación y de la posición del shunt magnético; α_0 crece ligeramente con la intensidad del campo magnético, y eso se debe a que el aumento de A_0, debido principalmente a las pérdidas por co-

rrientes de *Foucault*, predomina sobre el aumento de la raíz cuadrada del par director unitario C.

Tales aparatos, bastante raros hoy en día, son más o menos impropios, según la importancia del "juego", para la medida de las desviaciones, pero pueden ser empleados como aparatos de cero. Si a pesar de eso se emplean para medir desviaciones o elongaciones, se debe tratar que éstas se produzcan siempre en el mismo sentido (el amortiguamiento debe ser próximo al crítico), y para "estabilizar" el cero se imprime al aparato, antes de pasar a las medidas propiamente dichas, una desviación o elongación de amplitud superior a las que tendrán lugar más tarde (capítulo III, 4).

3. Lectura de las desviaciones. — Hay que asegurarse de la perpendicularidad de la escala al rayo reflejado en reposo.

Examinemos el caso de una escala recta que forma un ángulo β con la posición ideal (fig. 1). Leemos entonces $Oa = d'$ en lugar de $OA = d$ y $Ob = d''$ en lugar de $OB = OA = d$: las desviaciones leídas no son iguales si la corriente, conservando su intensidad constante, cambia de sentido; se supone, evidentemente, el aparato perfecto.

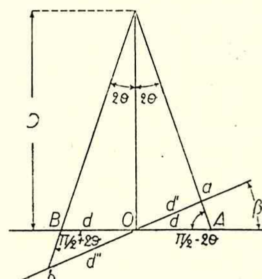


Fig. 1

Se tiene

$$\frac{d'}{d} = \frac{\cos 2\Theta}{\cos(2\Theta - \beta)}$$

y

$$\frac{d''}{d} = \frac{\cos 2\Theta}{\cos(2\Theta + \beta)}$$

de donde

$$\frac{d''-d'}{d} = \frac{2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{tg} 2\Theta}{\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2\beta \operatorname{tg}^2 2\Theta} \cong 2 \operatorname{tg} \beta . \operatorname{tg} 2\Theta \qquad (1)$$

porque β y Θ son en general pequeños.

$\operatorname{tg} 2\Theta$ varía casi siempre entre 0 y 0,25; supongamos para fijar las ideas $\beta = 5°$; se tiene entonces

$$d'' - d' = 0{,}044\, d \quad \text{para} \quad \operatorname{tg} 2\Theta = 0{,}25$$

o sea, si la escala está a 1 m del espejo

$$d'' - d' = 0{,}044 \,.\, 250 = 11 \text{ mm}$$

Se ve pues que la regulación debe hacerse muy cuidadosa-

mente, bajo pena de tener diferencias sensibles en las lecturas cuando se invierte la corriente, diferencias que se habrían podido atribuir erróneamente a otras causas. Se puede corregir la lectura haciendo el promedio entre d' y d''; para ángulos β pequeños se puede escribir

$$\frac{d_{med} - d}{d} = 1 - \cos \beta$$

En el ejemplo considerado, se tiene un error de sólo 0,4 °/₀ confundiendo d_{med} con d. Pero hay que tener en cuenta que en los aparatos no muy buenos no es de recomendar la inversión de la corriente (ver el parágrafo 2). En lo que sigue supondremos la escala perfectamente regulada, o sea $\beta = 0$.

$$\Theta = \frac{d}{2D}\left(1 - \frac{d^2}{3D^2} + \frac{d^4}{5D^4} - \frac{d^6}{7D^6} + \ldots\right) \quad (2)$$

Los valores de $\frac{d^2}{3D^2}$ y de $\frac{d^4}{5D^4}$, que figuran en el cuadro I, permiten darse cuenta de la importancia del error cometido al limitar más o menos el desarrollo.

CUADRO I.

$\frac{d}{D}$	0,05	0.10	0.15	0.20	0.25
$\frac{d^2}{3D^2}$	0.0008	0.0033	0.0075	0,0133	0.0208
$\frac{d^4}{5D^4}$	0.00000125	0.00002	0.0001	0.00032	0.00078

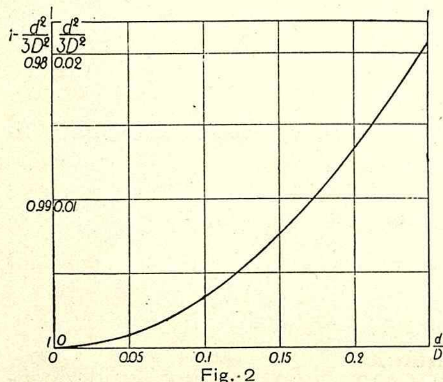


Fig.-2

Generalmente $\frac{d}{D}$ no sobrepasa 0,25 y el desarrollo puede limitarse a sus dos primeros términos

$$\Theta = \frac{d}{2D}\left(1 - \frac{d^2}{3D^2}\right) \quad (3)$$

La curva de la fig. 2 da

$\frac{d^2}{3\,D^2}$ y $1 - \frac{d^2}{3\,D^2}$ en función de $\frac{d}{D}$.

4. Medida de $k = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}$, $\lambda = log_e\, k$ **y** $\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}$.—Los valores de k, λ y α se deducen de la observación del movimiento del órgano móvil en las diferentes condiciones de amortiguamiento. Se puede utilizar sea el esquema de la fig. 6, donde se provoca el movimiento del órgano móvil por supresión de una corriente permanente, sea el esquema de la fig. 7, donde se descarga un condensador en el galvanómetro, o también el esquema de la fig. 8, donde se interrumpe la corriente primaria.

Debe evitarse operar por establecimiento de una corriente permanente (movimiento alrededor de un falso cero), por carga de un condensador o por inversión o establecimiento de una corriente primaria (descarga por inducción mutua) porque toda modificación de la corriente en el primer y tercer caso, o de la f.e.m. de la fuente en el segundo caso, influirían sobre el movimiento del galvanómetro, sea desplazando el falso cero, sea produciendo una descarga suplementaria.

Hacemos el estudio suponiendo el aparato perfecto.

Se puede determinar k *directamente*

$$k = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \cong \frac{d_1 \left(1 - \frac{d_1^{\,2}}{3\,D^2} \right)}{d_2 \left(1 - \frac{d_2^{\,2}}{3\,D^2} \right)} \cong \frac{d_1}{d_2} \left(1 - \frac{d_1^{\,2} - d_2^{\,2}}{3\,D^2} \right) \qquad (4)$$

donde Θ_1 es la primera y Θ_2 la segunda elongación angular y d_1 y d_2 las lecturas correspondientes hechas sobre la escala.

El error límite es, admitiendo $\Delta\,\Theta_1 = \Delta\,\Theta_2 = \Delta\Theta$

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta\,\Theta}{\Theta_1}\,(1 + k) \qquad (5)$$

Haciendo intervenir d_1 y d_2, con $\Delta d_1 = \Delta d_2 = \Delta d$

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta d}{d_1} \left\{ \frac{1 - \frac{d_1^{\,2}}{D^2}}{1 - \frac{d_1^{\,2}}{3\,D^2}} + k\, \frac{1 - \frac{d_2^{\,2}}{D^2}}{1 - \frac{d_2^{\,2}}{3\,D^2}} \right\} \qquad (5a)$$

Como $\frac{d^2}{D^2}$ es pequeño frente a la unidad, se puede escribir en un cálculo de error

$$\frac{\triangle k}{k} = \frac{\triangle d}{d_1} (1 + k) \qquad (5b)$$

y es suficiente calcular el error haciendo intervenir las elongaciones angulares y reemplazando en la expresión final $\frac{\triangle \Theta}{\Theta_1}$ por $\frac{\triangle d}{d_1}$.

Cuando k es suficientemente pequeño puede ser ventajoso medir no la 2ª sino la $(m + 1)^a$ elongación y determinar k *indirectamente* a partir de

$$p = \frac{\Theta_1}{\Theta_{m+1}} \cong \frac{d_1}{d_{m+1}} \left(1 - \frac{d_1{}^2 - d^2{}_{m+1}}{3\, D^2} \right) = \frac{d_1}{d_{m+1}} \cdot c \qquad (6)$$

con el factor de corrección

$$c = 1 - \frac{d_1{}^2 - d^2{}_{m+1}}{3\, D^2} \qquad (7)$$

Se tiene

$$k = \sqrt[m]{p} \qquad (8)$$

y el error límite

$$\frac{\triangle k}{k} = \frac{\triangle \Theta}{\Theta_1} \frac{1 + k^m}{m} \cong \frac{\triangle d}{d_1} \frac{1 + p}{\log_e p} \log_e k \qquad (9)$$

puede ser inferior al dado por la relación (5b). Queda por ver para que valores de k hay interés en efectuar la medida indirectamente y cual es el valor de m a adoptar. Se tiene $\frac{d}{dp}\left(\frac{\triangle k}{k}\right) = 0$ para $p \log_e p = 1 + p$ o sea para $p = 3,6$, de manera que hay interés en que la elongación Θ_{m+1} medida, sea próxima a $\frac{\Theta_1}{3,6}$, y si el amortiguamiento es lo suficientemente pequeño se dejará oscilar el aparato en consecuencia.

El número óptimo de oscilaciones simples es pues

$$m_1 = \frac{\log_e 3,6}{\log_e k} = \frac{1,28}{\log_e k}$$

y el error mínimo es

$$\frac{\triangle k}{k} = \frac{\triangle d}{d_1}\, 3,6 \log_e k$$

Los valores de m_1 en función de k están consignados en el cuadro II.

CUADRO II.

k	1,02	1,05	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2	2,5 y más
m_1	65	26	13	7	5	4	3	2	1
m_2	20	8	4	2	2	1			

Se ve que para valores de k próximos a la unidad m_1 es considerable, lo que va en contra de la rapidez y comodidad de la medida. Pero no siempre es necesario hacer $m = m_1$. En efecto, la función $z = \frac{1+p}{\log_e p}$ pasa por un mínimo igual a 3,6 para $p = 3{,}6$ (fig. 3), pero este mínimo es bastante poco acentuado y por ejemplo para $p = 1{,}5$ el valor de z es sólo de 6,2. Se puede pues, con un error límite aproximadamente doble, reducir el número de oscilaciones a

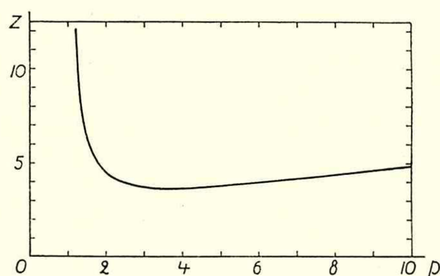


Fig. 3

$$m_2 = \frac{\log_e 1.5}{\log_e k} = \frac{0{,}4}{\log_e k}$$

considerablemente inferior a m_1 (cuadro II).

Observemos que aún colocándonos en el peor de los casos y haciendo $m = 1$, el error sobre k es poco importante. Pero no ocurrirá lo mismo en la determinación de λ y α. Se tiene en efecto

$$\lambda = \log_e k = \frac{1}{m} \log_e p \tag{11}$$

de donde

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta k}{k} \cdot \frac{1}{\lambda} \cong \frac{\Delta d}{d_1} \cdot \frac{1+p}{\log_e p} = \frac{\Delta d}{d_1} \frac{1+k^m}{m \log_e k} \tag{12}$$

La condición de mínimo de $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ es también aquí $p = 3{,}6$ y el número de oscilaciones óptimo es $m = m_1$. Es fácil ver que

si k es suficientemente pequeño, basta hacer $m = m_2$, pero no $m = 1$; así p. ej. para $k = 1{,}05$

$$z = \frac{\triangle \lambda}{\lambda} \Big/ \frac{\triangle d}{d_1} = 3{,}6 \qquad \text{para} \quad m = m_1 = 26$$

$$z = 6{,}2 \qquad \text{para} \quad m = m_2 = 8$$

$$z = 42 \qquad \text{para} \quad m = 1$$

La determinación directa de k a los efectos del cálculo de λ será pues inadmisible, si $k < 1{,}5$, cuando se trata de obtener una precisión del orden de 1 % (veremos más adelante la importancia del término $\frac{\triangle d}{d_1}$).

La misma conclusión vale para el cálculo de α. Se tiene

$$\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}$$

con

$$\frac{\triangle \alpha}{\alpha} = \frac{\triangle \lambda}{\lambda} \frac{\pi^2}{\pi^2 + \lambda^2} = \frac{\triangle d}{d_1} \frac{1 + k^m}{m \log_e k} \frac{\pi^2}{\pi^2 + (\log_e k)^2} \tag{14}$$

La curva de la fig. 4 da $x = \frac{\triangle \alpha}{\alpha} \Big/ \frac{\triangle d}{d_1} = f(k)$ para $m = 1$, así como algunos valores de x relativos a diversos valores de m ($m \cong m_1$, $m \cong m_2$) para pequeños valores de k_o.

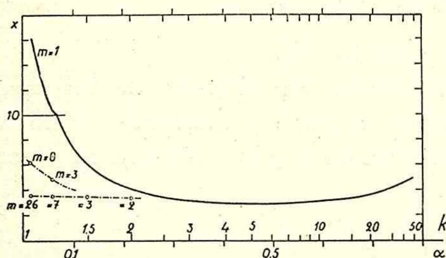


Fig. 4

Se observa que la medida de α es un poco más precisa que la de λ, porque el valor minimum minimorum de x, que tiene lugar para $k \cong 5{,}5$ y $m = 1$, es igual a $\sim 2{,}96$. Por otra parte el mínimo es poco acentuado; se puede considerar x constante e igual a 3 entre $k = 3{,}5$ y $k = 10$ ($m = 1$).

El cálculo de p por la relación (6) es bastante incómodo; para facilitarlo damos en la fig. 5 las curvas del factor de corrección c para diversos valores de $\frac{d_1}{d_{m+1}}$, con $\frac{d_1}{D}$ como parámetro.

Si para simplificar se hiciese $c = 1$ en la expresión de p, se

cometería un error suplementario $\frac{\triangle p}{p}$ igual a $1 - c$, con la repercusión correspondiente sobre k, λ o α.

Veamos ahora el valor de $\frac{\triangle d}{d_1}$. Se hace generalmente $d_1 = 150 - 200$ mm ($D = 1000$ mm) ; $\triangle d$ representa el error de lectura, si es necesario ligeramente aumentado, para tener en cuenta que la ecuación fundamental no se aplica rigurosamente, sino que corresponde a un caso ideal.

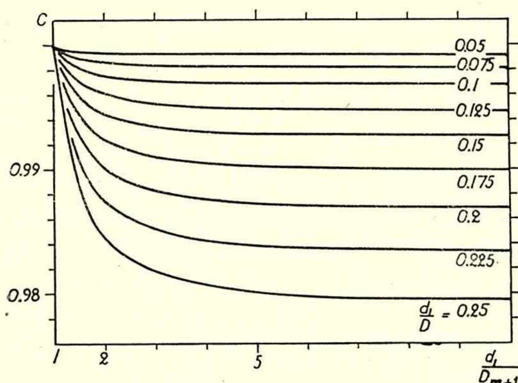


Fig. 5

Si en las mejores condiciones adoptamos $\triangle d = 1/3$ mm y $d_1 = 200$ mm, resulta $\frac{\triangle d}{d_1} = \frac{1}{600}$ y la determinación más precisa de λ o de α no puede hacerse con un error inferior a 0,6 °/₀₀.

Cuando el amortiguamiento, inferior al crítico, se aproxima a éste, la medida directa de λ se hace primero imprecisa y después imposible, porque Θ_2 deja de ser discernible. Se puede entonces determinar λ más exactamente a partir de dos ensayos, uno en circuito abierto (λ_o, α_o) y otro en circuito cerrado, de resistencia R conocida, elegida lo suficientemente grande como para que λ se mida todavía con precisión (λ_R, α_R) ; de acuerdo con lo visto anteriormente

$$\alpha_R - \alpha_o = \frac{\Phi_o^{\,2}}{2R\sqrt{KC}} \tag{15}$$

Sea R' la resistencia del circuito para la que queremos determinar λ (o α). Se tiene evidentemente

$$\alpha_{R'} - \alpha_o = \frac{\Phi_o^{\,2}}{2R'\sqrt{KC}} \tag{16}$$

y eliminando $\frac{\Phi_o^{\,2}}{2\sqrt{KC}}$ entre (15) y (16)

$$\alpha_{R'} = \alpha_o + \frac{R}{R'} (\alpha_R - \alpha_o) \qquad (17)$$

Esta relación vale cualquiera que sea R' ; en particular permite calcular α cuando el amortiguamiento es mayor que el crítico.

Si la resistencia R' es superior a la crítica, se obtiene inmediatamente

$$\lambda_{R'} = \frac{\pi \, \alpha_{R'}}{\sqrt{1 - \alpha_{R'}^2}} \qquad (18)$$

La determinación de $\alpha_{R'}$, y eventualmente de $\lambda_{R'}$, se simplifica si se conoce exactamente el valor de la resistencia crítica; el segundo ensayo es entonces superfluo; haciendo en (17) $R = R_c$ y $\alpha_R = 1$ volvemos a encontrar la relación

$$\alpha_{R'} = \alpha_o + \frac{R_c}{R'} (1 - \alpha_o) \qquad (19)$$

ya indicada en el capítulo anterior.

Observemos también que cuando el galvanómetro está muy amortiguado ($\alpha \gtrsim 3$) se puede determinar α observando el retorno al cero. Hemos visto en el capítulo I, 7 que después de haber transcurrido un intervalo suficiente de tiempo a partir del instante de la elongación, la ecuación de movimiento es

$$\frac{\Theta}{\Theta_{max}} = e^{-\frac{w_o}{2\alpha} t}$$

Por lo tanto, si se observa el instante t' en que la desviación del móvil, que vuelve al cero, tiene un valor Θ' cualquiera, pero suficientemente inferior a Θ_{max}, y después el instante t'' en que la desviación es Θ'', se tiene (*Jones*)

$$\frac{\Theta''}{\Theta'} = e^{-\frac{w_o}{2\alpha}(t'' - t')}$$

de donde

$$\alpha = \frac{\pi}{T_o} \frac{t'' - t'}{\log_e \frac{\Theta'}{\Theta''}} \qquad (20)$$

Prácticamente se puede hacer $\frac{\Theta'}{\Theta''} = 2$, y resulta

$$\alpha = 4{,}53 \frac{t'' - t'}{T_o}$$

Hablaremos en el parágrafo siguiente de la medida de T_o; la medida de $t'' - t'$ se hace sin dificultad, porque el movimiento del órgano móvil es lento.

Hasta el momento hemos admitido que el galvanómetro era perfecto; en realidad no es así, y hay que verificar en cada caso particular hasta que punto es válido lo que acabamos de decir. Se debe estudiar especialmente la variación de λ en función de Θ_1 a resistencia constante del circuito del galvanómetro; se harán varias series de medidas con diferentes ceros mecánicos para cada una; si hay lugar, se repetirá el estudio para diferentes posiciones del shunt magnético.

En un aparato perfecto, el valor de Θ_1 y la posición del cero no deberían modificar λ, pero en realidad es frecuentemente necesario mantener las elongaciones por debajo de cierto valor si se quiere que se cumplan las leyes teóricas con una aproximación suficiente. Los resultados del estudio hecho no valen en los aparatos de calidad deficiente; así por ejemplo la condición de mayor precisión en la medida de λ supone $p = 3{,}6$, pero si el campo está lejos de ser uniforme, el error cometido cuando Θ_{m+1} difiere notablemente de Θ_1 puede ser tal $\left(\frac{\Theta_p}{\Theta_{p+1}} \neq Cte \right)$ que es preferible medir k directamente, o mejor hacer $k = \sqrt{\frac{\Theta_1}{\Theta_3}}$, observando las dos primeras elongaciones del mismo lado.

5. Medida de T_o. — El pseudo-período T depende del amortiguamiento, y el dato propiamente dicho del aparato es el período ideal T_o. Se tiene (capítulo I, 5)

$$T_o = T\sqrt{1 - \alpha^2} = \frac{T}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}} \qquad (21)$$

Ya hemos estudiado la determinación de λ y α; debemos ahora examinar la de T.

Se provoca el movimiento del órgano móvil de la misma ma-

nera que para medir λ. La medida se hace determinando el tiempo τ_1 que emplea el móvil en hacer n oscilaciones. El pseudo-período es

$$T_1 = \frac{\tau_1}{n} \qquad (22)$$

Se pueden contar las oscilaciones sea a partir de los pasajes por cero, sea a partir de las elongaciones. Se eligen los pasajes por cero si las oscilaciones son lentas, porque en ese caso la velocidad en las proximidades de la elongación es demasiado pequeña para permitir apreciar exactamente el instante en que aquella tiene lugar. Por el contrario se cuentan los períodos a partir de las elongaciones si las oscilaciones son rápidas, porque la velocidad al pasar por cero es demasiado grande para que se pueda captar netamente el instante en que se produce este pasaje.

El error sobre τ_1 es el orden de 0,3 segundos, de manera que si se quiere conocer el período al 1 °/₀₀, τ_1 debe ser del orden de 30 segundos; cuanto mayor es la exactitud requerida, más oscilaciones habrá que contar. La medida sólo puede ser precisa si el decremento es pequeño.

Hay que marcar las oscilaciones cuando su número se hace algo grande, porque es fácil equivocarse al contarlas. Para evitar eso se emplea a veces el método de *Gauss*: se empieza por calcular el pseudo-período contando el tiempo τ_1 relativo a un pequeño número n de oscilaciones y se encuentra un valor T_1 que es una primera aproximación. Se pone en marcha el cronómetro en el instante de un pasaje por cero (o de una elongación, si es más cómodo) y se deja que la experiencia continúe sola, sin contar las oscilaciones, durante cierto tiempo τ_2, al cabo del cual se detiene el cronómetro al pasar el móvil por la misma posición y en el mismo sentido que en el instante inicial. Si T_1 fuese el valor exacto del pseudo-período, $\frac{\tau_2}{T_1}$ debería evidentemente ser un número entero, pero en realidad no es así. Sea entonces m el número entero más próximo a $\frac{\tau_2}{T_1}$:

$$\frac{\tau_2}{m} = T_2 \qquad (23)$$

representa mucho más exactamente el pseudo-período que T_1 por-

que el número de oscilaciones ha sido mayor que en la primera determinación. Se puede poner $T_2 = T_1 \pm \varepsilon$.

Para que el método sea aplicable no debe haber ninguna duda sobre el valor de m a adoptar, y para esto $\frac{\tau_2}{T_1}$ no debe diferir de un entero en más de 0,3 en valor absoluto. Esta condición fija el límite superior del tiempo durante el cual se puede dejar la experiencia marchar sola. Se tiene en efecto

$$\frac{m\,T_2}{T_1} = \frac{\tau_2}{T_1} = m\left(1 \pm \frac{\varepsilon}{T_1}\right)$$

y es por lo tanto necesario que

$$\frac{\varepsilon\, m}{T_1} \leqq 0{,}3$$

de donde

$$m \leqq \frac{0{,}3\,T_1}{\varepsilon} \tag{24}$$

y

$$\tau_2 \cong m\,T_1 \leqq \frac{0{,}3\,T_1^{\,2}}{\varepsilon} \tag{25}$$

Queda por precisar ε. Si se confunde T_2 con el valor verdadero del pseudo-período, ε representa el error absoluto en la determinación de T_1, $\varepsilon = \frac{\Delta \tau_1}{n}$. Supongamos p. ej. $T_1 = \tau_1 = 10$ s y $\varepsilon = 0{,}3$ s; entonces el tiempo τ_2 no debe ser superior a 100 s y el error relativo sobre el período pasa de 3 °/₀ a 0,3 °/₀. Tal operación sólo es posible si la 21.ª elongación es perfectamente visible: se deduce, si se puede apreciar un centésimo de Θ_1, que λ debe ser inferior a $\sim$ 0,21 (ver el capítulo **I, 8**).

Si el amortiguamiento del aparato fuese suficientemente pequeño, se podría recomenzar la experiencia con el nuevo valor de ε para aumentar aún la precisión de la medida, pero por una parte este caso se presenta raramente hoy en día, y por otra parte es inútil buscar una precisión demasiado grande sobre T, que a veces es ilusoria (el aparato no es perfecto), o no es necesaria.

Una vez conocidos T y λ se determina T_0 a partir de (21); el error es

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{\Delta T}{T} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\,\frac{\Delta \alpha}{\alpha} \tag{26}$$

Hay interés, para la mejor determinación de T_o, en hacer la medida sobre un galvanómetro tan poco amortiguado como sea posible, es decir, en circuito abierto.

Es útil estudiar la variación del pseudo-período con el decremento haciendo variar la resistencia del circuito del galvanómetro: se compararán los resultados con los teóricos.

En un estudio cuidadoso del aparato hay que tratar de darse cuenta de la importancia eventual del par director parásito debido a las impurezas ferromagnéticas del cuadro, midiendo T_o para diversos valores de Θ_l y diversas posiciones del cero mecánico, y, si es posible, haciendo oscilar el cuadro fuera del campo de su imán; si el aparato está provisto de shunt magnético se debe medir T_o para diversos valores del campo.

6. Determinación de las sensibilidades prácticas en intensidad y en tensión. — Se miden desviaciones correspondientes a corrientes conocidas.

Utilizamos el esquema de la fig. 6; con las notaciones adoptadas en esa figura, la expresión de la corriente en el galvanómetro es

$$I = I_t \frac{R_s}{R_g + R + R_s} = E \frac{R_s}{(\varrho + r)(R_g + R + R_s) + (R_g + R) R_s} \tag{27}$$

La f.e.m. E se mide con un voltímetro o con un potenciómetro, de acuerdo con la precisión deseada; según el caso se dispondrá (fig. 6b) o no (fig. 6a) un reductor de tensión; hay que asegurarse de que la corriente gastada por la pila es lo suficientemente pequeña como para no temer la modificación de la f.e.m.

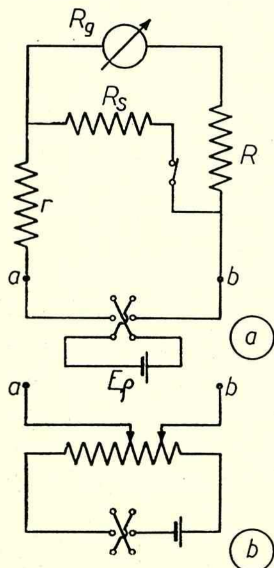


Fig. 6

Frecuentemente se puede despreciar en (27) $\varrho + \frac{(R_g + R) R_s}{R_g + R + R_s}$ frente a r. Resulta entonces

$$I = \frac{E}{r} \cdot \frac{R_s}{R_g + R + R_s} \tag{28}$$

Sea d la desviación leída sobre la escala (supuesta recta) que corresponde a

una corriente I conocida. La expresión de la sensibilidad práctica es

$$S\mu_A{}^{-1} = \frac{d_{m\ m}}{D_m\ I_A\ 10^6} = 2.10^{-3}\frac{\Theta}{I} \qquad (29)$$

entendiéndose que las desviaciones son lo suficientemente pequeñas como para que se pueda admitir

$$\Theta = \frac{d}{2\ D}$$

Si la desviación es mayor hay que escribir

$$S\mu_A{}^{-1} = \frac{d_{m\ m}}{D_m I_A\ 10^6}\left(1 - \frac{d^2}{3\ D^2}\right) \qquad (29a)$$

En un galvanómetro perfecto este valor sería independiente de d (siempre que el 3[er] término del desarrollo de $arctg\ 2\Theta$ fuese despreciable) y constituiría un dato característico del aparato.

Conocida $S\mu_A{}^{-1}$, una corriente incógnita I' que produce una desviación d' se calcula por la fórmula

$$I'_A = \frac{d'_{m\ m}}{D_m\ S\mu_A{}^{-1}}\ 10^{-6}\left(1 - \frac{d'^2}{3\ D^2}\right) \qquad (30)$$

Para estudiar correctamente un galvanómetro hay que efectuar su calibración para diversos valores de d que cubran toda la escala, y también para diversas posiciones del cero: la concordancia de las cifras obtenidas por aplicación de la relación (29a) nos da datos sobre la calidad del aparato. Pero este estudio no es necesario para poder emplear el galvanómetro. En efecto, basta trazar la curva de la sensibilidad práctica aparente $\frac{d}{I}$ (d) y no hay que preocuparse de la corrección $1 - \frac{d^2}{3\ D^2}$ ni para trazar la curva ni para utilizarla.

Se puede presentar el siguiente problema: ¿a que valor hay que regular la desviación d para calcular con el mínimo de error la sensibilidad práctica $S\mu_A{}^{-1}$ aplicando la relación no corregida (29)? Al aumentar d disminuye el error de lectura, pero aumenta el debido al hecho de despreciar la corrección $1 - \frac{d^2}{3\ D^2}$; hay pues una lectura óptima.



Sin tener en cuenta $\frac{\triangle D}{D}$, que no interviene si en el transcurso de las medidas conservamos constante la distancia D, el error es

$$\frac{\triangle \Theta}{\Theta} = \frac{\triangle d}{d} + \frac{d^2}{3\,D^2} \qquad (31)$$

El mínimo de (31) se realiza cuando

$$d = d' = \sqrt[3]{1{,}5\; D^2 \triangle d}$$

Se deduce

$$\left(\frac{\triangle \Theta}{\Theta}\right)_{min} = \left(1{,}5\,\frac{\triangle d}{D}\right)^{2/3}$$

y si $D = 1$ m y $\triangle d = 1/3$ mm, resulta

$$d' \cong 80 \text{ mm}$$

y

$$\frac{\triangle \Theta}{\Theta} \cong 0{,}6\ \%$$

Si se prefiere, en lugar de introducir $S_{\mu A^{-1}}$, se puede caracterizar el aparato por la sensibilidad práctica en ampere

$$S_A = \frac{10^{-6}}{S_{\mu A^{-1}}}$$

o por la curva de la inversa de la sensibilidad aparente $\frac{I}{d}\,(d)$.

La sensibilidad práctica en volt (**IV, 9**) se deduce a partir de la sensibilidad práctica en ampere conociendo R_g (ver el parágrafo 9) o R_c (ver el parágrafo 10). Se escribe

$$S_{\mu V^{-1}} = \frac{S_{\mu A^{-1}}}{R} \quad \text{y} \quad S_V = S_A \,.\, R$$

donde $R = R_g$ o $R = R_c$ según la definición.

Determinación de la desviación sin esperar el reposo.

Generalmente, hoy en día se hace trabajar el galvanómetro, en circuito cerrado, en condiciones de amortiguamiento próximas al crítico; en circuito abierto se dispone de llaves de corto-circuito para detener rápidamente las oscilaciones; sólo excepcionalmente se presenta el caso de tener que determinar indirectamente la po-

sición de equilibrio por observación del movimiento alrededor de dicha posición. Pero esta determinación era frecuente hace algunas decenas de años, cuando se empleaban continuamente los galvanómetros de imán móvil, poco amortiguados; numerosas obras mencionan aún hoy el método, de manera que le dedicaremos algunas palabras.

Sean Θ_1, Θ_2 y Θ_3 tres elongaciones sucesivas contadas a partir del cero del galvanómetro, y Θ_0 la posición de equilibrio que se trata de determinar. Resulta

$$\Theta_1 = \Theta_0 \pm \Theta$$

$$\Theta_2 = \Theta_0 \mp \Theta e^{-\lambda}$$

$$\Theta_3 = \Theta_0 \pm \Theta e^{-2\lambda}$$

de donde

$$\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_3 - \Theta_2} = e^{\lambda} = \frac{\Theta_1 - \Theta_0}{\Theta_0 - \Theta_2} \qquad (33)$$

y

$$\Theta_0 = \frac{\Theta_1 \Theta_3 - \Theta_2^{\,2}}{\Theta_1 + \Theta_3 - 2\Theta_2} \qquad (34)$$

Como en la relación (33) intervienen sólo diferencias de arcos, dicha relación, y por consiguiente la (34), valen si se cuentan las elongaciones a partir de un origen arbitrario, siempre que se refiera Θ_0 a ese mismo origen.

En realidad el aparato no es perfecto y λ no es constante: la fórmula (34) no es rigurosa. Se propuso reemplazarla por la siguiente fórmula, aproximada, más simple, en la que las elongaciones y la posición de equilibrio se refieren a un origen arbitrario

$$\Theta_0 = \frac{\Theta_1 + 2\,\Theta_2 + \Theta_3}{4} \qquad (35)$$

Obsérvese que si se admite $e^{-\lambda} = 1 - \frac{\lambda}{2}$ las fórmulas (34) y (35) dan resultados idénticos.

Levi indicó que (35) es el caso particular $n = 2$ de la fórmula

$$\Theta_o = \frac{\Theta_1 + \binom{n}{1}\Theta_2 + \ldots + \binom{n}{n-1}\Theta_n + \Theta_{n+1}}{2^n} \qquad (36)$$

donde

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \binom{n}{n-i} \qquad (37)$$

y demostró que cuando n es suficientemente grande, la relación (36) es exacta, aunque $\frac{\Theta_p}{\Theta_{p+1}}$ no sea independiente de p. Sin embargo, la aplicación de la fórmula (36) para n grande obliga a aumentar la duración de la medida para observar mayor número de elongaciones y complica un poco los cálculos; la ventaja sólo es real si las elongaciones se pueden determinar muy exactamente. En efecto

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + 1 = 2^n$$

y admitiendo que el error absoluto de lectura $\triangle\Theta$ es el mismo para todas las elongaciones, se tiene a partir de (36)

$$\triangle\Theta_o = \triangle\Theta$$

Por lo tanto es inútil hacer $n > 2$ si la modificación en el valor de Θ_o que resultaría del aumento de n es netamente inferior al error absoluto de lectura.

7. Determinación de la sensibilidad práctica en cantidad de electricidad. — Se puede proceder de varias maneras.

1) *Determinación directa.*

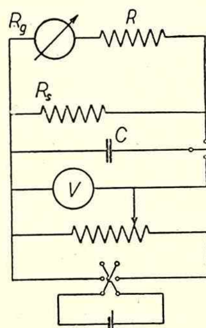


Fig. 7

Se miden elongaciones correspondientes a descargas conocidas y en condiciones de amortiguamiento definidas. A este efecto se puede emplear la descarga capacitiva (fig. 7) o la inductiva (fig. 8).

Supongamos la descarga capacitiva; se tiene

$$Q = C\,E\,\frac{R_s}{R_g + R + R_s} \qquad (38)$$

y

$$S\mu_Q{}^{-1} = \frac{d_{max\ mm}}{D_m\,Q_c\,10^6}\left(1 - \frac{d^2_{max}}{3\,D^2}\right) \qquad (39)$$

Aquí también valen las observaciones sobre el factor de corrección $1 - \frac{d^2_{max}}{3D^2}$ hechas a propósito de la sensibilidad práctica en intensidad.

Se debe emplear un condensador patrón, que no presente prácticamente fenómenos de absorción; en caso contrario, la medida puede resultar afectada de un error muy grande. La medida de la d.d.p. se hace con un voltímetro o, más raramente, con un potenciómetro, según la precisión requerida.

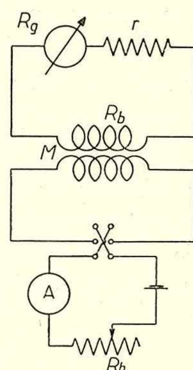


Fig 8

Es necesario trazar la curva $S\mu_Q^{-1}(R)$. Para pequeños valores del shunt, la medida sólo es posible si se utiliza algún dispositivo especial que cierre el circuito *después* de la descarga, como lo indicamos en el capítulo V,7.

Supongamos ahora que la descarga es inductiva; si se opera por interrupción de la corriente primaria se tiene

$$Q = \frac{M\,I}{R_b + R_g + r} \qquad (40)$$

M es una inducción mutua patrón; la corriente *I* se mide con un amperímetro o, más raramente, con el potenciómetro, según la precisión deseada.

Hay que estudiar la influencia de la amplitud de la elongación sobre la sensibilidad para cada valor del amortiguamiento y para diversas posiciones del cero mecánico.

2) *Determinación indirecta.*

a) Se aplica la relación

$$S\mu_Q^{-1} = S\mu_A^{-1} \frac{2\pi}{T_o} e^{-\alpha\tau} \qquad (41)$$

Los valores así obtenidos no están siempre de acuerdo con los que resultan de la calibración directa, porque el establecimiento de la fórmula (41) supone el aparato perfecto.

Si la intensidad del campo en el entrehierro no es constante el valor de $S\mu_A^{-1}$ depende de la posición del cuadro y *Klopsteg* observó que la falta de exactitud de la fórmula (41) puede deberse a veces a que no se adopta el valor conveniente de $S\mu_A^{-1}$. En efec-

to, durante la descarga el cuadro permanece prácticamente en reposo y es el valor de $S\mu_A^{-1}$ relativo a esta posición de reposo el que hay que hacer intervenir. Para esto es necesario, en lugar de medir la desviación que produce a partir del cero una corriente dada, determinar la corriente que vuelve a llevar al cero el cuadro previamente desviado por torsión mecánica del hilo. Si se sigue este procedimiento hay que cuidar que la torsión mecánica del hilo no desplace el punto de suspensión, sin lo cual, al llevar el spot al cero primitivo, el cuadro no se encuentra en la misma posición que antes de la experiencia. Influyen además los errores sobre α y T_o, y aún tomando todas las precauciones, no es raro encontrar diferencias relativas de más de 1 °/。 entre los valores calculados por (41) y los determinados directamente.

b) A veces se puede aplicar ventajosamente la fórmula aproximada (ver el capítulo V, 2)

$$S\mu_Q^{-1} = S\mu_{Qo}^{-1} \frac{R}{R + m\, R_c} \qquad (42)$$

con

$$m = e^{-\frac{\alpha_o}{\sqrt{1-\alpha_o^{\,2}}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\alpha_o^{\,2}}}{\alpha_o}} - 1 \qquad (43)$$

Para esto hay que determinar $S\mu_{Qo}^{-1}$ (por ensayo directo o a partir de $S\mu_A^{-1}$ y T_o), α_o y R_c. La concordancia es excelente, del orden de 0,5 — 1 °/。, salvo en las proximidades del funcionamiento en corto-circuito (R próximo a R_g), caso en que el valor obtenido puede diferir en 10 °/。 del resultado del ensayo directo. Pero como generalmente se trabaja con $1 \geqq \alpha \geqq \alpha_o$, la relación indicada puede evitar el trazado de $S\mu_Q^{-1}$ (R) punto por punto entre $R = \infty$ y $R = R_c$. Hemos encontrado que muchas veces su concordancia con los resultados del ensayo directo es mejor que la de la relación (41).

8. Determinación completa de las constantes del galvanómetro.

1) *Determinación de los coeficientes de la ecuación de movimiento (K, A_o, C y Φ_o).*

Es necesario conocer S_i, T_o, α_o y el grado de amortiguamiento α_R correspondiente a un valor arbitrario de R, lo suficientemente grande como para que se pueda determinar α_R con precisión.

Se determina en realidad $S_{\mu A^{-1}}$, de donde

$$S_i = \frac{10^3}{2} S_{\mu A^{-1}} = \frac{\Theta}{I} \qquad (29)$$

Además

$$S_i = \frac{\Phi_o}{C} \qquad (44)$$

$$\alpha_R - \alpha_o = \frac{\Phi_o{}^2}{2R\sqrt{KC}} \qquad (45)$$

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{K}{C}} \qquad (46)$$

$$\alpha_o = \frac{A_o}{2\sqrt{KC}} \qquad (47)$$

de donde

$$K = \frac{R\,T_o{}^3}{4\pi^3 S_i{}^2}(\alpha_R - \alpha_o) \qquad (48)$$

$$A_o = \frac{R\,T_o{}^2}{\pi^2 S_i{}^2}\alpha_o(\alpha_R - \alpha_o) \qquad (49)$$

$$C = \frac{R\,T_o}{\pi S_i{}^2}(\alpha_R - \alpha_o) \qquad (50)$$

$$\Phi_o = \frac{R\,T_o}{\pi S_i}(\alpha_R - \alpha_o) \qquad (51)$$

Cuando se conoce R_c se puede evitar la determinación de α_R; se tiene entonces

$$K = \frac{R_c\,T_o{}^3}{4\pi^3 S_i{}^2}(1 - \alpha_o) \qquad (52)$$

$$A_o = \frac{R_c\,T_o{}^2}{\pi^2 S_i{}^2}\alpha_o(1 - \alpha_o) \qquad (53)$$

$$C = \frac{R_c\,T_o}{\pi S_i{}^2}(1 - \alpha_o) \qquad (54)$$

$$\Phi_o = \frac{R_c\,T_o}{\pi S_i}(1 - \alpha_o) \qquad (55)$$

Frecuentemente se puede despreciar α_o frente a 1.

El cálculo del error límite al que da lugar la aplicación de (48) — (51) o de (52) — (55) es fácil; así, por ejemplo, a partir de (52) obtenemos

$$\frac{\triangle K}{K} = \frac{\triangle R_c}{R_c} + 3\,\frac{\triangle T_o}{T_o} + 2\,\frac{\triangle S_i}{S_i} + \frac{\triangle(1 - \alpha_o)}{1 - \alpha_o}$$

siendo el último sumando en general despreciable. En las mejores condiciones sólo se puede conocer K a menos de $\sim 4\ {}^o/_o$.

Se observará que en la determinación de $\frac{\triangle A_o}{A_o}$ a partir de (49) o (53) hay una compensación, por cierto sin importancia práctica, si T_o se determina a partir del pseudo-período en circuito abierto y del valor de α_o que utilizamos aquí. Si R_c ha sido obtenida por el método semi-directo [ver el parágrafo 10, fórmula (90)] a partir del valor de α_o que utilizamos aquí, aunque calculemos A_o por (53), $\frac{\triangle A_o}{A_o}$ debe determinarse a partir de (49).

En algunos textos se encuentra un procedimiento basado en la fijación sobre el órgano móvil de piezas suplementarias de momento de inercia calculable K_1. Se determinan entonces los períodos ideales T_o y T'_o relativos al funcionamiento sin y con masa suplementaria. De

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{K}{C}} \qquad \text{y} \qquad T'_o = 2\pi\sqrt{\frac{K + K_1}{C}}$$

se deduce

$$K = \frac{K_1\, T_o^{\,2}}{T'^{\,2}_o - T_o^{\,2}} \tag{56}$$

y

$$C = \frac{4\,\pi^2 K_1}{T'^{\,2}_o - T_o^{\,2}} \tag{57}$$

De las relaciones (47), (56) y (57) se deduce

$$A_o = \frac{4\,\pi\,\alpha_o\, K_1\, T_o}{T'^{\,2}_o - T_o^{\,2}} \tag{58}$$

y a partir de (44) y (57)

$$\Phi_o = \frac{4\,\pi^2 K_1\, S_i}{T'^{\,2}_o - T_o^{\,2}} \tag{59}$$

El procedimiento es una reliquia del tiempo en que se usaban los galvanómetros de imán móvil de muy pequeño amortiguamiento electromagnético, de manera que la diferencia entre α_R y α_o era demasiado chica para permitir el empleo del método expuesto en primer lugar. En estos galvanómetros el momento de inercia del órgano móvil es pequeño, y fijando sobre él por ejemplo un rectángulo de mica, es fácil modificar T_o lo suficiente como para que el procedimiento sea interesante, ya que las fórmulas (56) — (59) sólo dan resultados correctos si T_o y T'_o son bastante diferentes.

En los galvanómetros de cuadro, donde el momento de inercia del órgano móvil es importante, la pieza adicional debe tener un momento de inercia bastante grande ; se propone a veces disponer sobre el lado horizontal del cuadro una reglilla de momento de inercia K_1 no calculable y sobre ésta dos cilindros de metal no magnético, de momento de inercia K_2 calculable. En ese caso es necesario efectuar tres determinaciones del período ideal, relativas al órgano móvil solo, con reglilla y con reglilla y cilindros. Este procedimiento no tiene interés.

2) *Determinación de la inducción en el entrehierro y del número de espiras del cuadro.*

A partir de las ecuaciones (52) y (55), eliminando S_i , se tiene

$$\Phi_o{}^2 = \frac{4\pi K R_c}{T_o} (1 - \alpha_o) \qquad (60)$$

Ahora bien

$$\Phi_o = n\, a'\, b\, B \qquad (61)$$

donde a' designa la altura ficticia del cuadro que realmente corta las líneas de fuerza del campo supuesto uniforme (en primera aproximación $a' = a$, donde a es la altura real), b el ancho , y n el número de espiras del cuadro.

Para eliminar n explicitemos la expresión del momento de inercia del órgano móvil

$$K = K_o + \frac{s\,\delta\, n\, m}{2} \left\{ \frac{a\,c^2}{3} + a\, b^2 + \frac{b}{3} (b^2 + c^2) \right\} \qquad (62)$$

donde s es la sección del hilo , δ su densidad, c la profundidad del cuadro, K_o la diferencia entre el momento de inercia total K del

órgano móvil y el del cuadro, y m el factor que tiene en cuenta el suplemento de momento de inercia del cuadro debido a la aislación de los hilos. Si s_a es la sección del hilo aislado y δ_a la densidad de la aislación, se encuentra inmediatamente

$$m = 1 + \frac{s_a - s}{s} \frac{\delta_a}{\delta} \tag{63}$$

m es próximo a la unidad; en particular lo tomamos igual a 1 en el estudio de la mejor forma a dar al cuadro (ver el capítulo III, 5).

La expresión (62) introduce una nueva incógnita, s; para eliminarla consideremos la expresión de la resistencia interior del galvanómetro

$$R_g = R_h + \frac{2\,n\,\varrho\,(a + b)}{s} \tag{64}$$

donde R_h es la resistencia de los conductores que llevan la corriente.

Eliminando s entre (62) y (64) y después n y Φ_o entre la relación así obtenida y (60) y (61) se encuentra

$$B^2 = 4\pi\,\delta\,\varrho\,\frac{R_c\,(1 - \alpha_o)}{T_o\,(R_g - R_h)}\,\frac{K}{K - K_o}\,m\,\frac{a + b}{a'^2\,b^2}\left\{\frac{a\,c^2}{3} + \right.$$

$$\left. + a\,b^2 + \frac{b}{3}\,(b^2 + c^2)\right\} \tag{65}$$

Teniendo en cuenta que en ciertos casos $c << b < a$, $R_h << R_g$, $\alpha_o << 1$, resulta

$$B^2 = 4\pi\,\delta\,\varrho\,\frac{R_c}{T_o\,R_g}\,\frac{K}{K - K_o}\,m\,\frac{(a + b)\,(a + b/3)}{a'^2} \tag{65a}$$

relación indicada por *White*. En un cálculo aproximado podemos hacer $K_o << K$, $a' = a$ y $m = 1$, y como para el cobre

$\delta = 8{,}9$ C.G.S. $= 8900$ U.G. y $\varrho = 1800$ U.E.M.C.G.S. $= 18.10^{-9}\ \Omega$m

se puede escribir

$$B = 0{,}045\,\sqrt{\frac{R_c}{T_o\,R_g}}\,\sqrt{\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{b}{3a}\right)}\ \text{Wb/m}^2 \tag{65b}$$

El valor encontrado es generalmente por defecto, porque salvo la de $\alpha_0 \ll 1$, todas las otras aproximaciones obran disminuyendo el valor de B.

La relación de *White* no vale para los galvanómetros sensibles en tensión, donde la resistencia del cuadro puede ser pequeña frente a la de los hilos de suspensión; entonces hay que aplicar la fórmula (65).

Una vez calculada la inducción B, se determina el número de espiras n del cuadro por la relación (61).

Observación. — En el galvanómetro de imán se mide $\Sigma M G$ en lugar de Φ_0; se puede, determinando por cálculo G (ver el capítulo II, 1), encontrar con cierta aproximación el valor de M.

9. Medida de la resistencia interior del galvanómetro.

1) *Método del shunt.* Se emplea el esquema de la fig. 6 suprimiendo la resistencia R.

Hacemos una primera medida con el shunt R_s fuera del circuito; sea r_1 el valor dado a r; la corriente es

$$I_{1g} = \frac{E}{r_1 + \rho + R_g} \tag{66}$$

y la desviación angular correspondiente es

$$\Theta_1 = S_i I_{1g} \tag{67}$$

Hagamos ahora una segunda medida shuntando el galvanómetro y con un nuevo valor r_2 de r. La corriente es

$$I_{2g} = \frac{E R_s}{(r_2 + \rho)(R_g + R_s) + R_g R_s} \tag{68}$$

y la desviación angular correspondiente es

$$\Theta_2 = S_i I_{2g} \tag{69}$$

Se deduce

$$R_g = R_s \frac{K(r_1 + \rho) - (r_2 + \rho)}{r_2 + \rho - R_s (K - 1)} \tag{70}$$

siendo

$$K = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \tag{71}$$

Prácticamente la resistencia interior ρ de la pila es completamente despreciable frente a r_1 y r_2, de manera que se puede escribir

$$R_g = R_s \frac{K r_1 - r_2}{r_2 - R_s (K - 1)} \qquad (72)$$

Se puede no modificar r, conservando en la segunda medida $r_2 = r_1$; se tiene entonces

$$R_g = R_s \frac{r_1 (K - 1)}{r_1 - R_s (K - 1)} \cong R_s (K - 1) \qquad (73)$$

si, como ocurre en general, $R_s << r_1$.

En particular, si se da a R_s un valor tal que $K = 2$, el método se llama de "semi-desviación"; resulta

$$R_g = R_s \frac{r_1}{r_1 - R_s} \cong R_s \qquad (74)$$

El método de semi-desviación no es satisfactorio. En primer lugar, observemos que si la escala del aparato es recta, a $K = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = 2$ no corresponde $\frac{d_1}{d_2} = 2$; hay que hacer la corrección del arco tangente. Además, siempre existe la posibilidad de la falta de proporcionalidad del galvanómetro, es decir, S_i puede ser función de Θ; en ese caso hay que tener la curva exacta de calibración del aparato.

Se mejora mucho la medida haciendo $\Theta_2 = \Theta_1$. El método se llama entonces de "igual desviación" y los defectos señalados anteriormente desaparecen; ahora r debe ser una resistencia variable porque $r_2 < r_1$.

La resistencia del galvanómetro se obtiene haciendo $K = 1$ en (72), de donde

$$R_g = R_s \frac{r_1 - r_2}{r_2} \qquad (75)$$

Casi siempre la resistencia r_2 forma parte de r_1; poniendo $r_1 - r_2 = x$, resulta

$$R_g = R_s \frac{x}{r_2}$$

y el error relativo sobre R_g debido a los defectos de calibración es

$$\frac{\Delta R_g}{R_g} = \frac{\Delta R_s}{R_s} + \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta r_2}{r_2} = \frac{\Delta R_s}{R_s} + \frac{2 \Delta r}{r} \qquad (76)$$

Al error de calibración hay que agregar el de determinación: en efecto, nosotros suponemos que $\Theta_2 = \Theta_1$, o sea $K = 1$, mientras que en realidad se tendrá siempre $K = 1 + \varepsilon$. Haciendo $K = 1 + \varepsilon$ en (72) resulta

$$R'_g = R_s \frac{r_1 - r_2 + \varepsilon r_1}{r_2 - \varepsilon R_s} \tag{77}$$

en lugar de (75); de (77) y (75) se deduce inmediatamente

$$\frac{\delta R_g}{R_g} = \frac{R'_g - R_g}{R_g} = \varepsilon \left\{ \frac{R_s}{r_2} + \frac{r_1}{r_1 - r_2} \right\} = \varepsilon \left(1 + \frac{R_g}{r_1} \right) \left(1 + \frac{R_s}{R_g} \right) \tag{78}$$

ε es dos veces el error de lectura; para disminuirlo hay que hacer $\Theta_1 = \Theta_2$ lo mayor posible, sin preocuparse de la proporcionalidad de las desviaciones, porque se opera por igualdad de éstas. En particular se puede llevar el cero al extremo de la escala por torsión de la suspensión.

Para disminuir $\frac{\delta R_g}{R_g}$ es necesario que $R_g \ll r_1$, lo que ocurre generalmente, y $R_s \ll R_g$, condición que puede ser más difícil de realizar, porque si R_s es demasiado pequeña, la resistencia de las conexiones y contactos no siempre es despreciable; además, en casos extremos, el excesivo amortiguamiento del aparato hace la medida incómoda. Para evitar este último inconveniente y satisfacer a la vez la condición $R_s \ll R_g$ podría pensarse en colocar una resistencia R en serie con R_g, y shuntar el conjunto por R_s. Tal disposición no conviene puesto que se mide entonces $R_g + R$, lo que disminuye la precisión de la medida de R_g, porque al error absoluto de medida se agrega el de R; es preferible aumentar R_s prescindiendo de R.

Veamos la precisión de la medida: si por ejemplo $d = 400$ mm y $\Delta d = 1/2$ mm resulta $\varepsilon = 1/400$. Supongamos para fijar las ideas $\frac{\delta R_g}{R_g} = 2\,\varepsilon = 1/200$; entonces, si se trabaja con cajas de precisión, donde $\Delta R/R = 1/500$, la medida se puede hacer con un error límite del orden de 1 %.

Es necesario verificar si la f. e. m. de la pila no se modificó durante el ensayo; después de haber hecho la segunda medida (R_s, r_2) se vuelve a la primera (r_1) para verificar si la desviación no ha variado; en caso de pequeña variación se aplicará el principio de las medidas cruzadas.

Si el galvanómetro es muy sensible puede ser necesario disponer sobre la pila un reductor de tensión de resistencia suficiente para evitar la polarización. No obstante, las resistencias r_1 y r_2 deben ser bastante grandes para que se cumpla $R_g \ll r_1$ y $\varrho \ll r_2$, donde ϱ es aquí la resistencia resultante del circuito reductor-pila visto desde los puntos de alimentación del circuito principal de medida.

2) *Método del falso cero de Lord Kelvin.* El galvanómetro, cuyo órgano móvil está libre, se coloca en una rama de un puente de Wheatstone que tiene la diagonal donde habitualmente va el aparato de cero formada por un simple interruptor I_n (fig. 9a). Cuando se cierra la diagonal de la pila el galvanómetro desvía, siendo la desviación diferente según que I_n esté abierto o cerrado, a menos que los puntos B y D estén al mismo potencial. Pero esa es precisamente la condición de equilibrio del puente y trae como consecuencia

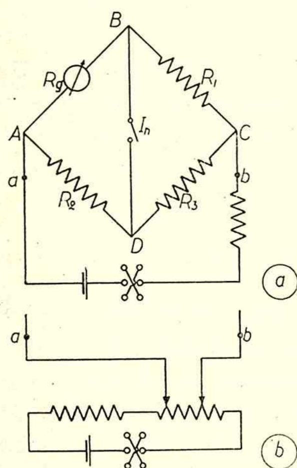


Fig. 9

$$R_g = \frac{R_1 R_2}{R_3} \qquad (79)$$

La regulación se hace de la misma manera que en el puente de Wheatstone ordinario, observando sea un aumento, sea una disminución de la desviación al cerrar I_n; dicho de otro modo, se observan desviaciones alrededor de la posición de equilibrio forzado del órgano móvil, de donde deriva el nombre de "falso cero" dado al método.

Es interesante observar (*Gerard*) que este método se puede considerar como la condensación, en una sola manipulación, de las dos medidas del método de igual desviación que hemos estudiado más arriba.

En efecto, supongamos el interruptor abierto: el galvanómetro, no shuntado, está en serie con R_1, que desempeña el papel de r_1 en en el método de igual desviación. Al cerrar el interruptor se shunta el galvanómetro con R_2 (que reemplaza a R_s) y se pone el conjunto galvanómetro-shunt en serie con $\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$ (que reemplaza a r_2). Se encuentra entonces que las relaciones (75) y (79) son

equivalentes. El error de determinación se puede evaluar por la relación (78) donde se reemplaza r_1 por R_1 y R_s por R_2, o sea

$$\frac{\delta R_g}{R_g} = \varepsilon \left(1 + \frac{R_g}{R_1} \right) \left(1 + \frac{R_2}{R_g} \right) \qquad (80)$$

relación que por supuesto puede obtenerse directamente del estudio del puente. Resulta que hay interés, como en el método de igual desviación, en elegir R_1 grande y R_2 pequeña frente a R_g, pero cuidando que el galvanómetro no resulte demasiado amortiguado. Notemos que en (80) $\varepsilon = \frac{\Delta d}{d}$, y no $2 \frac{\Delta d}{d}$ como en (78), porque no se hacen dos medidas sucesivas, sino que se observa la constancia de una desviación; esa es una ventaja del método del falso cero sobre el anterior; una segunda ventaja consiste en que no hay que preocuparse de la constancia rigurosa de la f.e.m. de la pila de alimentación.

Para limitar la corriente en el galvanómetro (aunque tratando de hacer la desviación lo mayor posible), será necesario ya sea agregar una resistencia en serie con la pila (fig. 9a), ya sea alimentar el puente con un reductor de tensión (fig. 9b).

Se notará que $\frac{\delta R_g}{R_g}$ no depende de la sensibilidad en intensidad del galvanómetro ensayado, sino sólo de las condiciones de lectura.

3) *Método del puente de Wheatstone ordinario.* Los métodos que acabamos de examinar tenían la ventaja de no exigir otro galvanómetro que el ensayado. Pero si se dispone de un aparato suplementario se puede medir R_g como una resistencia ordinaria, colocando el galvanómetro estudiado en una rama del puente de Wheatstone, y el suplementario en la diagonal, como de costumbre, en serie con el interruptor I_n de la fig. 9. Generalmente se bloquea el órgano móvil del aparato estudiado para evitar el efecto de sus oscilaciones, pero hay que asegurarse bien que la corriente que pasa por él no es exagerada. Es inútil shuntar el galvanómetro, para admitir corrientes más fuertes en las ramas del puente, porque lo que se mide entonces es la resistencia equivalente

$$r' = \frac{R_g\ s}{R_g + s}$$

de donde se deduciría

$$R_g = \frac{r' s}{s - r'} \qquad (81)$$

y

$$\frac{\Delta R_g}{R_g} = \frac{\Delta s}{s} \frac{R_g}{s} + \frac{\Delta r'}{r'} \frac{R_g}{r'} \qquad (82)$$

Ahora bien, para que la acción del shunt sea sensible, su valor debe ser pequeño frente a R_g y la relación (82) demuestra que la determinación de R_g a partir de r' es entonces poco precisa. La observación vale evidentemente para el puente de *Lord Kelvin*.

Nos queda por examinar la sensibilidad del método Para una corriente i en la rama del puente que contiene el galvanómetro cuya resistencia queremos medir, la corriente δi_g a través del aparato de cero, cuando R_g se aparta en δR_g (variación ficticia equivalente a la de la resistencia variable real) del valor de equilibrio, es

$$\delta i_g = i \frac{\delta R_g}{R_g} \frac{1}{\frac{R'_g}{R_g}\left(1 + \frac{R_g}{R_1}\right) + \left(1 + \frac{R_2}{R_g}\right)}$$

de donde

$$\frac{\delta R_g}{R_g} = \varepsilon \frac{S_i}{S'_i} \left\{ \frac{R'_g}{R_g}\left(1 + \frac{R_g}{R_1}\right) + \left(1 + \frac{R_2}{R_g}\right) \right\} \qquad (83)$$

designando por S_i la sensibilidad del aparato ensayado, por S'_i la del aparato de cero y por R'_g la resistencia interior de este último. $\varepsilon = \frac{\Delta d}{d}$, siendo Δd el error absoluto de lectura y d la longitud de la escala, que puede considerarse como desviación correspondiente a la corriente máxima admisible en el aparato ensayado. Se ve que $\frac{\delta R_g}{R_g}$ no depende de S_i sino sólo de la relación $\frac{S_i}{S'_i}$: eligiendo el aparato de cero más sensible que el ensayado se puede obtener mayor sensibilidad de la medida que con el puente de *Kelvin*. La elección de las resistencias se hace con el mismo criterio que en el puente de *Kelvin*: R_1 debe ser grande y R_2 pequeña frente a R_g; además hay interés en que $\frac{R'_g}{R_g}$ sea pequeña. La fórmula (83), así como la (80), puede ser transformada si se quiere agregar la condición de que el aparato de cero debe encontrarse en condiciones de amortiguamiento crítico, pero

tal discusión no presenta aquí interés, la medida se hace bien aún para α bastante diferente de 1 (ver las curvas de la fig. 9, I para el aumento del tiempo del retorno al cero cuando nos alejamos de $\alpha \cong 1$); notemos solamente que las conclusiones relativas a la elección de las resistencias no varían.

Como en el método de *Kelvin*, puede ser necesario disponer una resistencia de protección en serie con la pila o alimentar el puente por medio de un reductor de tensión.

10. Medida de la resistencia crítica. — Se han propuesto tres métodos que examinaremos sucesivamente.

1) *Método directo.* Se emplea por ejemplo el esquema de la fig. 6 con $R = 0$, y se observa el movimiento para distintos valores de la resistencia $R_g + R_e$ del circuito del cuadro, que se hace decrecer progresivamente. Se anota el mayor valor de la resistencia exterior R_e , vista del galvanómetro, para el que no se observan más oscilaciones; este valor, sumado a R_g , da R_c . Se indica que el método da valores de R_c demasiado grandes, pero generalmente se le suele atribuir una precisión superior a la que puede dar; en realidad es muy poco exacto.

El método se basa esencialmente en la observación del retorno al cero (ver el capítulo **I, 8**). Sea Θ_{min} la menor elongación que se puede apreciar; si $\Theta_2 < \Theta_{min}$ no se observan oscilaciones; el aparato *parece* aperiódico, siendo en realidad periódico de decremento

$$\lambda = log_e \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \geqq log_e \frac{\Theta_1}{\Theta_{min}} = log_e n = \lambda_1 \qquad (84)$$

donde $\frac{\Theta_1}{\Theta_{min}} = n$.

Para cada valor de n podemos calcular el valor de $\lambda_1 = log_e n$ que basta sobrepasar para no observar más oscilaciones. Los valores de λ_1 , y los correspondientes de α_1 , han sido indicados, para diversos valores de n, en el cuadro II del capítulo **I, 8**; para mayor comodidad los reproducimos aquí (cuadro III).

CUADRO III

n	100	200	500	1000
λ_1	4,61	5,30	6,21	6,91
α_1	0,83	0,86	0,89	0,91

Sea R_l el valor de la resistencia del circuito del cuadro cuando el movimiento empieza a parecer aperiódico. Se tiene entonces

$$\alpha_l = \alpha_o + \frac{\Phi_o^{\,2}}{2\,R_l\,\sqrt{K\,C}} \qquad (85)$$

Cuando el movimiento es realmente aperiódico crítico

$$\alpha_c = 1 = \alpha_o + \frac{\Phi_o^{\,2}}{2\,R_c\,\sqrt{K\,C}} \qquad (86)$$

Se deduce, a partir de (85) y (86)

$$\varepsilon = \frac{R_l - R_c}{R_c} = \frac{1 - \alpha_l}{\alpha_l - \alpha_o} \qquad (87)$$

El error es por supuesto siempre por exceso ($R_l > R_c$). Si en un cálculo de error despreciamos α_o frente a α_l, próximo a la unidad, (87) se escribe

$$\varepsilon \cong \frac{1 - \alpha_l}{\alpha_l} \qquad (88)$$

y dando a α_l, los valores del cuadro III, se tiene (cuadro IV)

CUADRO IV

n	100	200	500	1000
ε	0,21	0,16	0,12	0,10

En realidad, si α_o no es despreciable, ε es todavía mayor. Por lo tanto hay que modificar el método: no tratar de realizar el movimiento aperiódico crítico, imposible de apreciar con exactitud, sino observar, además del movimiento en circuito abierto, que da α_o, un movimiento periódico no muy amortiguado, donde se pueda medir α con precisión. La resistencia crítica se deduce entonces a partir de α_o, α y R, donde R es la resistencia del circuito correspondiente a α. Es éste el segundo método de medida de R_c, que en realidad no es más que un perfeccionamiento lógico del primero, y por eso lo llamaremos "semi-directo".

2) *Método semi-directo.* Si R es la resistencia del circuito del cuadro

$$\alpha = \alpha_o + \frac{\Phi_o^{\,2}}{2\,R\,\sqrt{K\,C}} \qquad (89)$$

y teniendo en cuenta (84), se deduce

$$\frac{\alpha - \alpha_o}{1 - \alpha_o} = \frac{R_c}{R} = y \qquad (90)$$

Es pues suficiente, para medir R_c, la determinación de los grados de amortiguamiento α_o en circuito abierto y α en circuito cerrado de resistencia total R. La medida del período en estos dos regímenes de marcha, que recomiendan algunos textos, es inútil. Es evidente que para calcular R hay que conocer R_g.

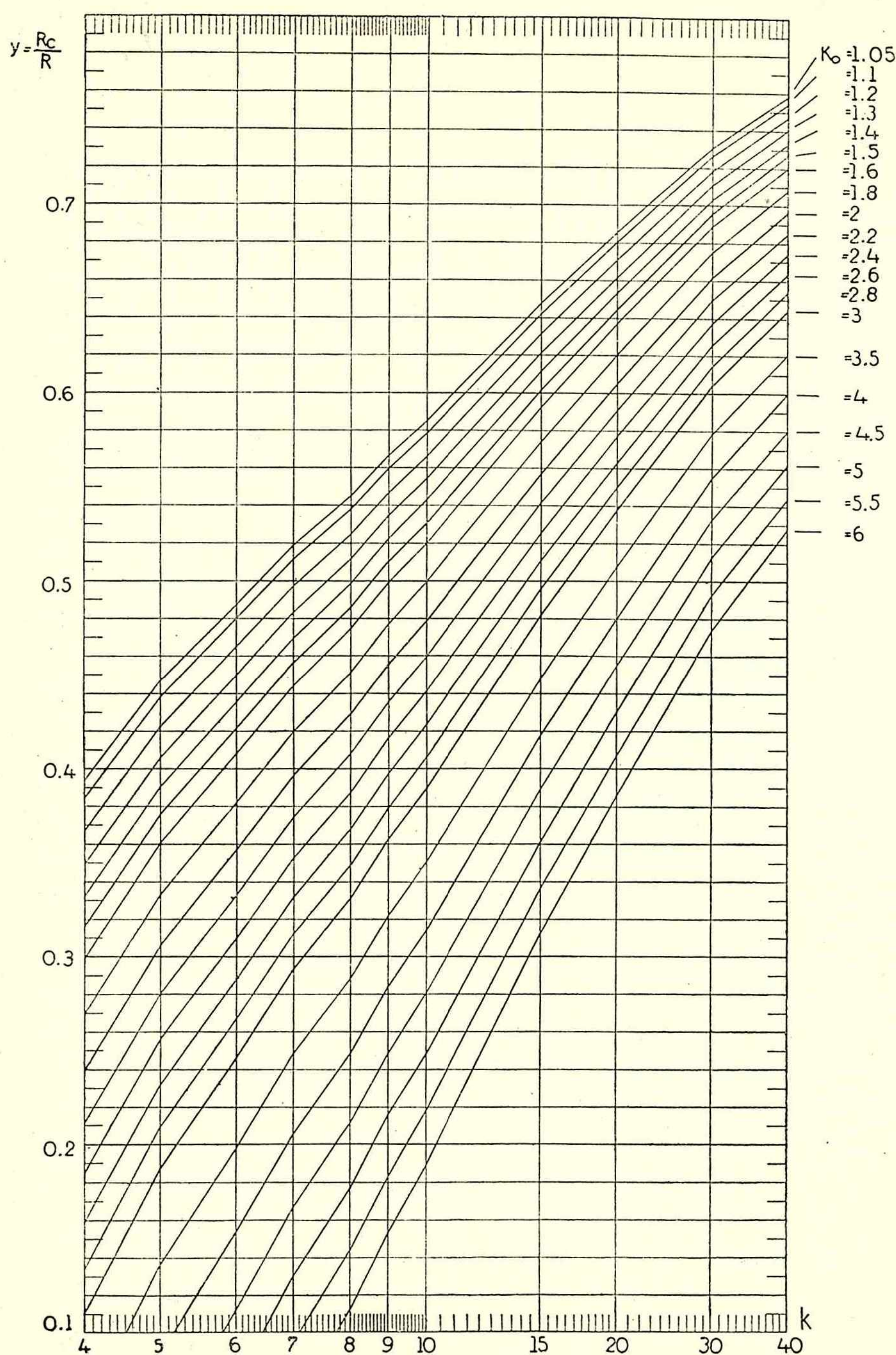
El valor directamente calculable no es el de α, sino el de $k = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \sqrt[m]{p}$ (ver el parágrafo 4) y para facilitar los cálculos hemos dado en la fig. 10, bajo forma de ábaco, la relación (90), calculada para valores de k comprendidos entre 4 y 40, con k_o, comprendido entre 1,05 y 6, como parámetro. Obsérvese que $y(\alpha)$ es una recta; sería pues natural trazar $y(\alpha)$, e indicar, para cada valor de α, el correspondiente valor de k, que es el que obtenemos directamente. La escala de k así definida disminuye rápidamente, porque k tiende a infinito cuando α tiende a uno. Por lo tanto adoptamos una escala de α variable por intervalos para obtener una escala de k de error sensiblemente constante, tal que 1 mm represente siempre, aproximadamente, la misma fracción de k, a saber, alrededor de 0,02. Se puede así situar k a menos de 1 °/₀; la escala de k varía, pero la variación de una división a otra es siempre lo suficientemente pequeña como para que se pueda, sin error sensible, interpolar por partes proporcionales.

Nos queda por estudiar la precisión del método. En un galvanómetro dado α_o es constante, pero se puede elegir a voluntad el valor de α, obrando sobre R. Vamos a demostrar que para cada valor de α_o (o sea de k_o) existe un valor de α (o sea de k) que hace mínimo el error sobre R_c. Se tiene, a partir de (90):

$$\frac{\triangle R_c}{R_c} = \frac{\triangle R}{R} + \frac{\triangle y}{y} \qquad (91)$$

a) *Estudio de* $\frac{\triangle y}{y}$. De la relación (90) se deduce

$$\frac{\triangle y}{y} = \frac{\triangle \alpha}{\alpha} \frac{\alpha}{\alpha - \alpha_o} + \frac{\triangle \alpha_o}{\alpha_o} \frac{\alpha_o (1 - \alpha)}{(1 - \alpha_o)(\alpha - \alpha_o)} \qquad (92)$$



$y = \frac{R_C}{R}$
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
4
5
6
7
8
9
10
15
20
30
40
k
K_0 =1.05
=1.1
=1.2
=1.3
=1.4
=1.5
=1.6
=1.8
=2
=2.2
=2.4
=2.6
=2.8
=3
=3.5
=4
=4.5
=5
=5.5
=6

Fig. 10

Cuando α aumenta, $\frac{\alpha}{\alpha - \alpha_o}$ y $\frac{\alpha_o (1 - \alpha)}{(1 - \alpha_o)(\alpha - \alpha_o)}$ disminuyen y por lo tanto $\frac{\Delta y}{y}$ disminuye. La variación de $\frac{\Delta \alpha}{\alpha}$ es, como vimos,

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{\Delta d}{d_1} \frac{1 + k^m}{m \log_e k} \frac{\pi^2}{\pi^2 + (\log_e k)^2} \qquad (14)$$

A igualdad de $\frac{\Delta d}{d_1}$, $\frac{\Delta \alpha}{\alpha}$ disminuye primero, pasa por un mínimo y luego aumenta (fig. 4).

Se deduce que no hay interés en aumentar demasiado α porque el efecto del aumento de $\frac{\Delta \alpha}{\alpha}$ puede contrabalancear el de la disminución de $\frac{\alpha}{\alpha - \alpha_o}$ y de $\frac{\alpha_o (1 - \alpha)}{(1 - \alpha_o)(\alpha - \alpha_o)}$.

A partir de (92) y (14), y teniendo en cuenta (13) y (11), hemos trazado las curvas de $\frac{\Delta y}{y} / \frac{\Delta d}{d_1}$ en función de k, con k_o como parámetro.

Para k o k_o inferiores o iguales a 2, se hicieron los cálculos para dos valores de m : $m = 1$ y $m = m_1$.

Del examen de las curvas se deducen dos conclusiones interesantes :

1) Para cada valor de k_o la curva $\frac{\Delta y}{y} / \frac{\Delta d}{d_1}$ pasa por un mínimo para $k = k'$; pero este mínimo es muy poco acentuado y basta que k se mantenga dentro de cierto intervalo $\Delta' k$ para que $\frac{\Delta y}{y} / \frac{\Delta d}{d_1}$ aumente sólo en 10 °/。 de su valor mínimo. Los valores de k', $\Delta' k$ y $\left(\frac{\Delta y}{y} / \frac{\Delta d}{d_1}\right)_{min}$ para diversos valores de k_o están consignados en el cuadro V.

2) Si determinamos k_o haciendo $m = 1$ en lugar de $m = m_1$ $\left(\frac{\Delta y}{y} / \frac{\Delta d}{d_1}\right)_{min}$ aumenta muy poco, de donde se deduce este interesante resultado: *al contrario de lo que ocurría en el cálculo de λ o α, basta, a los efectos del cálculo de R_c, determinar directamente*

$k_o = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}$ *en lugar de hacerlo indirectamente como* $k_o = \sqrt[m]{p}$. La medida es pues cómoda y rápida.

CUADRO V

k_o		k'	$\Delta'k$	$\left(\frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta d}{d_1}\right)_{min}$
1,05	$m = m_1$	6	3-15	3,1
	$m = 1$	8	4-20	3,7
1,2	$m = m_1$	8	4-20	3,5
	$m = 1$	9	5-20	4,1
1,5	$m = m_1$	9	5-25	4,4
	$m = 1$	10	6-25	4,8
2	$m = m_1$	12	7-30	5,9
	$m = 1$	15	7,5-30	6,2
2,5	$m = 1$	18	9-40	7,3
3	$m = 1$	22	10-50	8,4
4	$m = 1$	25	16-50	11
6	$m = 1$	40	20-60	16

Nos queda por precisar $\frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta d}{d_1}$. Si suponemos $D = 1$ m y, colocándonos en las mejores condiciones, $d_1 \cong 200$ mm y $\Delta d = 1/3$ mm, se encuentra $\frac{\Delta d}{d_1} = \frac{1}{600}$, valor que nos servirá para el cálculo de $\frac{\Delta R_c}{R_c}$.

b) *Estudio de* $\frac{\Delta R}{R}$. Se tiene

$$R = R_e + R_g \tag{93}$$

y

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta R_e}{R_e} \frac{R_e}{R} + \frac{\Delta R_g}{R_g} \frac{R_g}{R} \tag{94}$$

Hay que distinguir dos casos:

1) R_g *es pequeño frente a* $R > R_c$. Es el caso más frecuente. Se tiene entonces

$$\frac{\Delta R}{R} \cong \frac{\Delta R_e}{R_e} \tag{95}$$

La resistencia exterior R_e está constituída generalmente por una caja de resistencias de precisión 1 a 2. 10^{-3}. Se deduce que

$$\frac{\Delta R_c}{R_c} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta y}{y} \tag{91}$$

varía como $\frac{\Delta y}{y}$; valen las conclusiones hechas a propósito del mínimo de $\frac{\Delta y}{y}$; se elegirá R_c para obtener $k = k'$, o, en su defecto, un valor comprendido en el intervalo $\Delta'k$ indicado en el cuadro V. Se encuentra entonces

$$\left(\frac{\Delta R_c}{R_c}\right)_{min} = \frac{\Delta R}{R} + \left(\frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta d}{d_l}\right)_{min} \quad \frac{\Delta d}{d_l} = \frac{1}{500} + \frac{1}{600}\left(\frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta d}{d_l}\right)_{min} \quad (96)$$

Los resultados están consignados en el cuadro VI (se admitió $m = 1$).

CUADRO VI

k_o	1.05	1.2	1.5	2	2.5	3	4	6
$\left(\frac{\Delta R_c}{R_c}\right)_{min}$	0 007	0.008	0.009	0.012	0.014	0.016	0.02	0.03

Se ve pues que el error aumenta con el amortiguamiento en circuito abierto: para $k_o \leqq 1,5$ (o sea para $\lambda_o \leqq 0,41$, $\alpha_o \leqq 0,128$) R_c puede determinarse con un error límite de 1 °/., pero para $k_o = 6$ ($\lambda_o = 1,8$), el error es ya de 3 °/..

2) *R_g es importante frente a* $R > R_c$; en este caso es lícito despreciar el término $\frac{\Delta R_e}{R_e} \frac{R_e}{R}$ y como el valor de R_g es próximo al de R_c se puede escribir

$$\frac{\Delta R}{R} \cong \frac{\Delta R_g}{R_g} \cdot \frac{R_c}{R} = \frac{\Delta R_g}{R_g} \cdot y = 0{,}01\, y \quad (97)$$

suponiendo que $\frac{\Delta R_g}{R_g} = 0{,}01$. En este caso hay interés en elegir un valor de R más elevado que el correspondiente a $k = k'$ del cuadro V: el aumento de $\frac{\Delta y}{y}$ que resulta está contrabalanceado por la disminución de y, es decir, de $\frac{\Delta R}{R}$, y en definitiva $\frac{\Delta R_c}{R_c}$ disminuye. Admitiendo $\frac{\Delta d}{d_l} = \frac{1}{600}$ resulta

$$\frac{\Delta R_c}{R_c} = \frac{1}{100}\, y + \frac{1}{600}\left(\frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta d}{d_l}\right) \quad (98)$$

relación que permite trazar $\frac{\Delta R_c}{R_c}(k)$ para diversos valores de k_o como parámetro. Dada la forma de $y(k)$ y de $\left(\frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta d}{d_l}\right)(k)$ se encuentra que el aspecto de $\frac{\Delta R_c}{R_c}(k)$ es el mismo que el de $\left(\frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta d}{d_l}\right)(k)$ con los mínimos desplazados hacia el origen.

Nos basta indicar los resultados: los valores k'', para los cuales $\frac{\triangle R_c}{R_c}$ es mínimo, el intervalo $\triangle'' k$ en el que conviene mantenerse, y finalmente $\left(\frac{\triangle R_c}{R_c}\right)_{min}$. Se admitió $m = 1$ (cuadro VII).

CUADRO VII

k_o	1.05	1.2	1.5	2	3	4	6
k''	4	5	6	9	15	20	30
$\triangle'' k$	2—10	3—10	4—15	5—25	8—40	10—40	20—60
$\left(\frac{\triangle R_c}{R_c}\right)_{min}$	0.011	0.012	0.013	0.015	0.02	0.023	0.03

La precisión de la medida es prácticamente la misma que en el primer caso. Si se busca el máximo de precisión se debe calcular k a partir de

$$k = \frac{d_1}{d_2}\left(1 - \frac{d_1^{\,2} - d_2^{\,2}}{3\,D^2}\right) \qquad (4)$$

pero basta hacer

$$k = \frac{d_1}{d_2}$$

si es suficiente, como ocurre generalmente, una precisión un poco inferior a la que acabamos de indicar, porque el error suplementario ocasionado es siempre inferior a $\frac{d_1^{\,2}}{3\,D^2}$, o sea a 1,3 °/₀ si $\frac{d_1}{D} = 0,2$.

Se ve pues que el método semidirecto da resultados mucho mejores que el directo.

3) *Determinación de R_c a partir de la curva S_q (R) de sensibilidad en cantidad de electricidad.*

Hemos visto en el parágrafo 7 como se puede determinar directamente la curva S_q (R); si además se mide el decremento en circuito abierto, λ_o, se puede calcular la sensibilidad correspondiente al amortiguamiento crítico, que es

$$S_{qc} = S_{qo}\,\frac{1}{e}\,e^{\frac{\lambda_o}{\pi}\,arctg\,\frac{\pi}{\lambda_o}}$$

donde S_{qo} es la sensibilidad en circuito abierto. Basta pues llevar S_{qc} sobre S_q (R): la abscisa correspondiente es R_c. El método da buenos resultados; se puede contar generalmente con una precisión del orden de 2 °/₀; es inconveniente porque se debe determinar la curva S_q (R).

Si $\lambda_o \leq 0,15$ se puede limitar $e^{\frac{\lambda_o}{\pi} arctg \frac{\pi}{\lambda_o}}$ a los dos primeros términos de su desarrollo en serie; resulta entonces

$$S_{qc} = \frac{S_{qo}}{e}\left(1 + \frac{\lambda_o}{2}\right)$$

11. Ensayo de un galvanómetro diferencial. – Dejando un enrollamiento abierto se pueden hacer para el otro las mismas determinaciones que para un galvanómetro simple; ciertas constantes (p. ej. T_o) son independientes del enrollamiento elegido; por el contrario otras (p. ej. R_g) dependen, y deben medirse en los dos enrollamientos por separado.

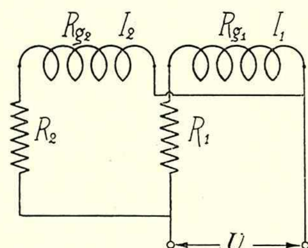


Fig. 11

Una medida importante es la de la constante del aparato, K (ver el capítulo IV, 21)

$$K = \frac{\Phi_{o2}}{\Phi_{o1}}$$

Se realiza a este efecto el esquema de la fig. 11; se fija R_2 y se ajusta R_1 de manera que el galvanómetro diferencial quede en cero. Sean R'_1 y R'_2 los valores que realizan esa condición; se tiene entonces:

$$I'_1 = \frac{U}{R'_1 + R_{g1}} \quad \text{y} \quad I'_2 = \frac{U}{R'_2 + R_{g2}}$$

de donde

$$K = \frac{I'_1}{I'_2} = \frac{R'_2 + R_{g2}}{R'_1 + R_{g1}}$$

Para eliminar R_{g1} y R_{g2} se repite la experiencia fijando otro valor R''_2 de R_2 y restableciendo el equilibrio dando a R_1 un nuevo valor R''_1. Se cumple

$$I''_1 = \frac{U}{R''_1 + R_g} \quad \text{y} \quad I''_2 = \frac{U}{R''_2 + R_g}$$

de donde

$$K = \frac{I''_1}{I''_2} = \frac{R''_2 + R_{g2}}{R''_1 + R_{g1}} = \frac{R''_2 - R'_2}{R''_1 - R'_1}$$

El error relativo de calibración es la suma de los de las dos cajas si las resistencias menores son parte de las mayores; para reducir el error de determinación, $R''_1 - R'_1$ debe ser grande frente a la suma de las δR_1 que no parecen afectar el equilibrio.

BIBLIOGRAFÍA

1. **H. Chaumat** — Cours de mesures électriques (redacción de los alumnos) Gibert, Paris, 1932.
2. **E. Gerard** — Mesures électriques — Gauthier - Villars, Paris, 1912.
3. **S. Gerszonowicz** — *Bol. Fac. Ing. Montevideo*, N.° 8, p. 455, 1939. *Rev. Electr.*, t. 26, p. 220, 1940 o *R. G. E.* t. 47, p. 287, 1940.
4. **R. L. Jones** — *Proc. Phys. Soc.*, t. 26, 1914.
5. **P. E. Klopsteg** — *Phys. Rev.*, t. 7, p. 633, 1916.
6. **B. Levi** — *Elettricista*, t. 40, N.° 10, 1931.
7. **W. P. White** — ver la bibliografía del capítulo III.
8. **A. Zeleny** — ver la bibliografía del capítulo III.

CAPITULO VII.

Galvanómetro de resonancia.

1. **Generalidades.** — Ya indicamos en el capítulo I, 16, el principio del galvanómetro de resonancia: un galvanómetro (por ejemplo de cuadro o de imán móvil) puede vibrar con una amplitud notable a la frecuencia de la corriente sinusoidal que lo atraviesa, si se realizan ciertas condiciones, que en determinados casos consisten en la igualdad de esta frecuencia con la ideal del aparato. El spot se mueve con un movimiento sinusoidal de frecuencia generalmente lo bastante elevada como para que el ojo no pueda seguirlo; se observa pues un ensanchamiento del spot, siendo el ancho de la banda el doble de la amplitud del movimiento.

Este aparato recibió en numerosos textos el nombre de "galvanómetro de vibración"; pero de acuerdo con el vocabulario electrotécnico internacional (1938), ese nombre se reserva para los galvanómetros de cuerda, que estudiaremos en el capítulo siguiente. El mismo vocabulario define el galvanómetro de resonancia como "galvanómetro en el cual se regula el período de oscilación propia del órgano móvil, de manera que dicho período sea igual al de la corriente que se trata de medir o revelar". Veremos en los parágrafos 2 y 4 que tal regulación no es siempre la más conveniente y creemos que hubiera sido mejor adoptar la siguiente definición: "el galvanómetro de resonancia es un galvanómetro cuyo período de oscilación ideal se puede regular con el fin de realizar el mayor ensanchamiento del spot para cierta corriente o d.d.p. alterna que se quiere medir o revelar".

El galvanómetro de resonancia es preferible al teléfono como aparato de cero en corriente alterna de baja frecuencia, inferior

por ejemplo a 200 Hz; por el contrario, en el estado actual de la construcción el teléfono es más sensible en las frecuencias acústicas superiores, por ejemplo de 1000 Hz en adelante. En las frecuencias entre 200 y 1000 Hz, o mayores, puede ser preferible el galvanómetro de resonancia, porque es más cómodo y más preciso observar el ensanchamiento de un spot que la modificación de la intensidad de un sonido; además no se requiere silencio en la sala de medidas. Otra ventaja del galvanómetro de resonancia sobre el teléfono consiste en su insensibilidad a las armónicas; puede utilizarse para hacer medidas con onda no sinusoidal, mientras que con el teléfono, cuyo período ideal generalmente no se regula, las armónicas pueden hacer la medida imposible si se trabaja con una frecuencia fundamental suficientemente inferior a la de resonancia.

Las aplicaciones del galvanómetro de resonancia no se limitan a su empleo como aparato de cero, aunque esa es su finalidad principal. Puede servir para medir una pequeña corriente o d.d.p. alterna; el ensanchamiento del spot es proporcional a la corriente y no al cuadrado de la corriente, lo que es una ventaja en lo que se refiere a la sensibilidad del aparato, pero hay que recordar que lo que se mide en la resonancia es, prácticamente, el valor máximo de la onda fundamental de la corriente, y no el valor eficaz de la corriente total.

El funcionamiento de un galvanómetro de resonancia en un circuito recorrido por corriente sinusoidal de amplitud y frecuencia constantes es esencialmente diferente del de un galvanómetro de cuadro o imán móvil en un circuito de corriente continua de intensidad constante: en este último caso el galvanómetro acusa cierta desviación y sólo interviene por su resistencia en lo que se refiere a la distribución de las corrientes en el circuito, mientras que en el primer caso, además de la impedancia en reposo del galvanómetro, es necesario tener en cuenta la f. e. m. $-g \frac{d(\alpha)}{dt}$ debida al movimiento permanente del cuadro. El galvanómetro de resonancia es en realidad un motor síncrono.

El estudio fundamental es el del funcionamiento del galvanómetro de resonancia en un circuito donde obra una f.e.m. o una d.d.p. sinusoidal de amplitud y frecuencia constantes, pero cuando la impedancia del circuito del galvanómetro es grande, es decir, cuando se puede aplicar una d. d. p. suficiente como para poder

despreciar frente a ella la f.e.m. $-g\frac{d\Theta}{dt}$, el funcionamiento a d.d.p. constante se reduce prácticamente al funcionamiento a corriente de amplitud constante. Aunque este último funcionamiento es sólo un caso límite, posee una importancia práctica considerable; su estudio es particularmente simple y lo haremos en primer lugar.

2. Funcionamiento del galvanómetro de resonancia con corriente de amplitud constante. Sensibilidad en intensidad en corriente sinusoidal. — La ecuación de movimiento se escribe

$$K\frac{d^2\Theta}{dt^2}+A_o\frac{d\Theta}{dt}+C\,\Theta=gi \qquad (1)$$

donde $i=I_m\,sen\,w\,t$.

La solución de (1) ya ha sido dada en el capítulo I, 16. Se tiene

$$\Theta=\Theta_m\,sen\,(wt-\psi) \qquad (2)$$

donde

$$\Theta_m=\frac{g\,I_m}{\sqrt{(C-Kw^2)^2+A_o{}^2\,w^2}} \qquad (3)$$

y

$$tg\,\psi=\frac{A_o\,w}{C-K\,w^2} \qquad (4)$$

Designemos por

$$S_{ia}=\frac{\Theta_m}{I_m} \qquad (5)$$

la sensibilidad en intensidad del galvanómetro de resonancia en corriente sinusoidal.

Se puede hacer variar S_{ia} obrando sobre

1) la pulsación de la corriente w
2) la pulsación propia ideal, modificando:
   a) el par director C
   b) el momento de inercia K
3) el par motor unitario g.

Examinaremos estos diferentes casos [1].

(1) Como ya recomendamos en el capítulo I, 3, será ventajoso para el lector comparar el estudio que sigue con el de la resonancia en un circuito eléctrico que comprenda en serie resistencia, self y capacidad. Véase especialmente el capítulo "Resonancia" de las "Leçons d'electrotechnique générale" de P. Janet, o "Oscilaciones eléctricas" de M. Simonoff, capítulo IV, 5.

1. *Acción sobre la pulsación de la fuente exterior, w, permaneciendo g, C y K constantes.*

A partir de las relaciones (3) y (5) se obtiene

$$S_{ia} = \frac{g}{\sqrt{(C - K w^2)^2 + A_o{}^2 w^2}} = \frac{S_i}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4 \alpha_o{}^2 x^2}} \quad (6)$$

observando que

$$\frac{g}{C} = S_i \quad (7)$$

y haciendo

$$x = \frac{w}{w_o} \quad (8)$$

Nos bastará estudiar la función

$$y = \frac{S_{ia}}{S_i} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4 \alpha_o{}^2 x^2}} \quad (9)$$

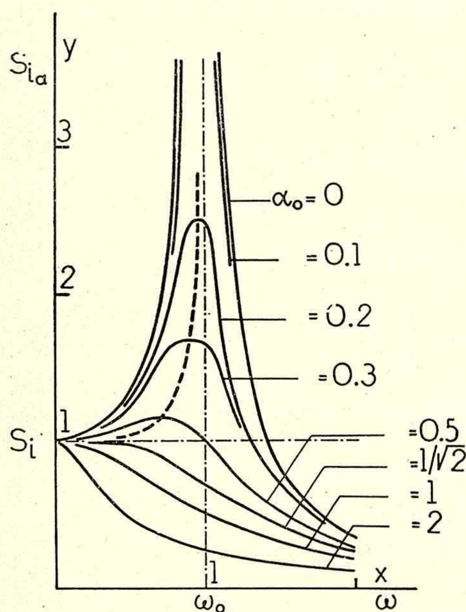


Fig 1

Las curvas de la fig. 1 representan $y(x)$, o $S_{ia}(w)$, con α_o como parámetro. Siendo α_o constante, el máximo ocurre para

$$x = \sqrt{1 - 2\alpha_o{}^2} \quad (10)$$

es decir, cuando

$$w = w_r = w_o \sqrt{1 - 2\alpha_o{}^2} \quad (11)$$

Se ve que las curvas sólo tendrán máximo si

$$\alpha_o \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (12)$$

Cuando $\alpha_o = \frac{1}{\sqrt{2}}$ el máximo tiene lugar en corriente continua ($x = 0$). La pulsación w_r correspondiente al máximo sólo se confundiría con la ideal del sistema móvil si el amortiguamiento fuese nulo; en realidad es tanto menor cuanto mayor es α_o. Observemos que w_r es inferior, no solamente a la pulsación ideal w_o, sino también a la real del sistema móvil en movimiento libre, que es $b'' = w_o \sqrt{1 - \alpha_o{}^2}$.

El valor del máximo de y se obtiene haciendo $x = \sqrt{1 - 2\alpha_0^2}$ en (9):

$$y_{max} = \frac{1}{2\alpha_0 \sqrt{1 - \alpha_0^2}} \qquad (13)$$

y

$$S_{i\,a\,max} = \frac{S_i}{2\alpha_0 \sqrt{1 - \alpha_0^2}} \qquad (14)$$

Los máximos relativos a los diferentes valores de α_0 están situados sobre la curva

$$y_{max} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} \qquad (15)$$

obtenida eliminando α_0 entre (10) y (13) y representada en trazo punteado sobre la fig. 1.

Se ve que el máximo es tanto más pronunciado, dicho de otro modo, la resonancia es tanto más aguda, cuanto menor es α_0. Cuando se busca una gran sensibilidad máxima en corriente sinusoidal, α_0 debe ser muy pequeño: es éste precisamente el caso de los galvanómetros de resonancia, en los que generalmente α_0 está comprendido entre 0,001 y 0,01; se puede entonces admitir que $w_r = w_0$, de donde

$$y_{max} = \frac{1}{2\alpha_0} \qquad (13a)$$

y

$$S_{i\,a\,max} = \frac{S_i}{2\alpha_0} = \frac{g}{A_0 w_0} \qquad (14a)$$

Debido a que la resonancia es muy aguda, el valor de y para x muy diferente de 1 (o sea la sensibilidad a las armónicas) será relativamente muy pequeño: el aparato es *selectivo*. Puede haber interés en hacer el mismo aparato *fiel*, es decir, aproximadamente con la misma sensibilidad para todas las armónicas; bastará elegir el amortiguamiento en consecuencia: una simple inspección de la fig. 1 muestra que haciendo α_0 igual o ligeramente diferente de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y manteniendo la frecuencia de todas las ondas suficientemente inferior a w_0 ($x \ll 1$), se obtiene el resultado deseado, realizando así un oscilógrafo. Precisaremos más adelante (capítulo XI) estas condiciones; las hemos mencionado aquí sola-

mente para subrayar la identidad de base de dos aparatos destinados a desempeñar servicios tan completamente diferentes como un galvanómetro de resonancia y un oscilógrafo: todo consiste en la elección de las constantes del movimiento.

Nos queda por examinar la fase de Θ con respecto a I. Volvamos a la relación (4)

$$tg\ \psi = \frac{A_o w}{C - K w^2} = \frac{2\,\alpha_o x}{1 - x^2}$$

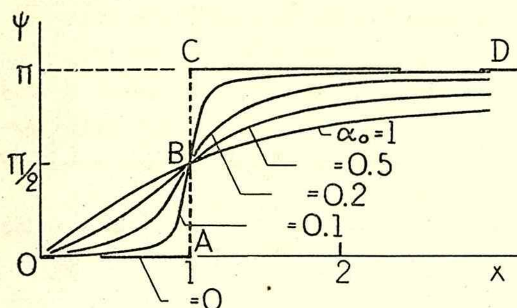


Fig. 2

En el caso ideal de $\alpha_o = 0$, $\psi(x)$ estaría representada por el segmento OA, el punto B y la semirecta CD, es decir, $\psi = 0$ para $x < 1$, $\psi = \frac{\pi}{2}$ para $x = 1$ y $\psi = \pi$ para $x > 1$. produciéndose el llamado "salto de fase", al pasar por $x = 1$ (fig. 2).

Para $\alpha_o \neq 0$, las curvas parten todas de $\psi = 0$, $x = 0$, pasan por $\psi = \frac{\pi}{2}$ para $x = 1$ y admiten $\psi = \pi$ como asíntota.

En particular, para muy pequeños valores de α_o, ψ es sensiblemente igual a cero apenas x es algo inferior a 1, y a π apenas x es algo superior a 1. El "salto de fase" es tanto más neto cuanto menor es α_o, propiedad que, como veremos, es también válida cuando la regulación se efectúa por acción sobre w_o; se ha tratado de aprovechar esta circunstancia para la regulación muy exacta de la condición $w = w_o$ (*Wenner; Kennelly, Hunter y Prior.*)

2. *Acción sobre la pulsación propia ideal* w_o.

La acción puede hacerse de dos maneras: sobre el par director C, que es la regulación más frecuente y permite una variación continua, y sobre el momento de inercia K.

a) *Acción sobre C, permaneciendo g, w, y K constantes.*

A partir de las ecuaciones (3) y (5) se obtiene

$$S_{i\alpha} = \frac{g}{\sqrt{(C - K w^2)^2 + A_o{}^2 w^2}} = \frac{g}{K w^2} \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + a^2}} \qquad (16)$$

haciendo esta vez

$$x = \frac{w_o}{w} \tag{17}$$

y

$$a = \frac{A_o}{Kw} = 2\,\alpha_o\,x$$

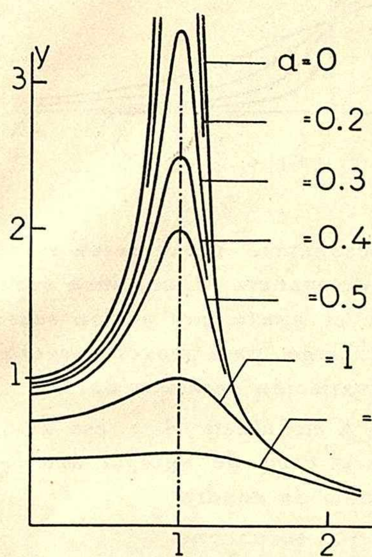


Fig. 3

Suponemos A_o independiente de C, pero debemos observar que esta hipótesis puede ser inadmisible cuando la regulación se hace obrando sobre la longitud de los hilos de suspensión, si dicha longitud llega a ser inferior a cierto valor (ver los parágrafos 7 y 25).

Las curvas

$$y = \frac{S_{ia}}{\frac{g}{K\,w^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + a^2}} \tag{18}$$

trazadas con a como parámetro, están dadas en la fig. 3. Cualquiera que sea el valor del amortiguamiento, el máximo ocurre para $x = 1$, o sea para

$$w = w_o \tag{19}$$

o

$$C = K\,w^2 \tag{19 a}$$

y es tanto más pronunciado cuanto menor es A_o. Se tiene

$$y_{max} = \frac{1}{a} = \frac{1}{2\,\alpha_o} \tag{13 a}$$

y

$$S_{ia\ max} = \frac{S_i}{2\,\alpha_o} = \frac{g}{A_o\,w_o} \tag{14 a}$$

Examinemos el defasaje; la relación (4) se escribe

$$tg\,\psi = \frac{A_o\,w}{C - K\,w^2} = \frac{a}{x^2 - 1}$$

$\psi(x)$ está representada por las curvas de la fig. 4, que pasan todas por $\psi = \frac{\pi}{2}$ para $x = 1$ y admiten $\psi = 0$ como asíntota. Para $x = 0$, ψ está comprendido entre $\frac{\pi}{2}$ y π, siendo tanto más próximo a π cuanto menor es A_o.

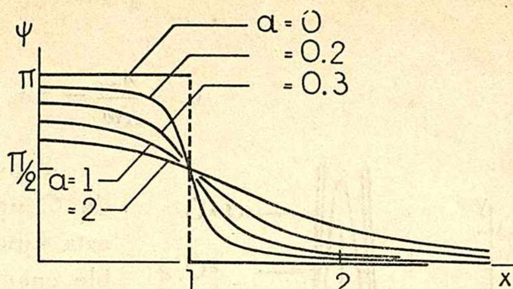


Fig. 4

b) *Acción sobre K, permaneciendo g, w y C constantes.*

En realidad, para obtener la resonancia no se actúa sobre K, porque si bien se hace variar K de manera discontinua cambiando el órgano móvil, se termina el ajuste por acción sobre C o, más raramente, sobre w. Sin embargo, para mayor generalidad, estudiaremos la regulación por variación continua de K.

Admitiremos que la variación de K no afecta A_o; esa hipótesis no se cumpliría por ejemplo en el caso de agregar una espira en corto-circuito a un galvanómetro de cuadro.

A partir de las ecuaciones (3) y (5) se obtiene

$$S_{ia} = \frac{\Theta_m}{I_m} = \frac{g}{\sqrt{(C - Kw^2)^2 + A_o{}^2 w^2}} = \frac{g}{C} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + a'^2}} \qquad (20)$$

con x definido por la relación (17) y

$$a' = \frac{A_o w}{C} = \frac{2\,\alpha_o}{x}$$

Examinemos la función

$$y = \frac{S_{ia}}{S_i} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + a'^2}} \qquad (21)$$

representada por las curvas de la fig. 5 con a' como parámetro.

Cualquiera que sea el amortiguamiento, el máximo ocurre siempre para $x = 1$, es decir, para

$$w = w_o \quad (19)$$

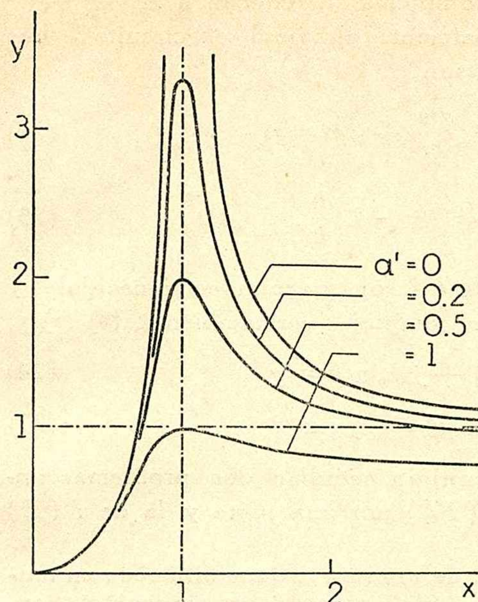


Fig. 5

siendo

$$y_{max} = \frac{1}{a'} = \frac{1}{2\,\alpha_o} \quad (13a)$$

y

$$S_{ia\,max} = \frac{S_i}{2\,\alpha_o} = \frac{g}{A_o\,w_o} \quad (14\,a)$$

resultado idéntico al de la regulación por acción sobre C.

Examinemos el defasaje. La relación (4) se escribe

$$tg\,\psi = \frac{A_o\,w}{C - K w^2} = \frac{a'}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Las curvas $\psi\,(x)$, representadas en la fig. 6, parten de $\psi = \pi$ para $x = 0$, pasan por $\psi = \frac{\pi}{2}$ para $x = 1$ y admiten asíntotas paralelas al eje de las x, de ordenadas crecientes con A_o.

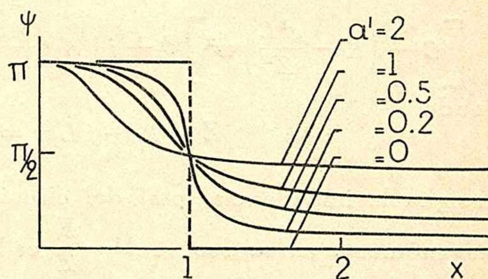


Fig. 6

3. *Acción sobre g, permaneciendo w, C y K constantes.*

A igualdad de los otros factores S_{ia} aumenta proporcionalmente a g.

3. Funcionamiento del galvanómetro de resonancia bajo tensión de amplitud constante. — Consideremos ahora el caso de un circuito que contiene en serie una impedancia, el galvanómetro y un generador de f.e.m. $e = E_m\,sen\,wt$ de amplitud y pulsación cons-

tantes. Designemos por R la resistencia total y por Lw la reactancia total del circuito cuando el órgano móvil del galvanómetro está en reposo. La importancia de este circuito elemental es primordial, ya que los circuitos complejos se reducen a él.

Sea i la corriente que realmente atraviesa el circuito. Las ecuaciones de funcionamiento son

$$K \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + A_o \frac{d\Theta}{dt} + C\,\Theta = gi \qquad (22)$$

$$e - g \frac{d\,\Theta}{dt} = Ri + L \frac{di}{dt} \qquad (23)$$

En régimen estacionario Θ e i son magnitudes sinusoidales y se puede escribir con notación compleja (ver también I, 16) ([1])

$$(C - K\,w^2)\,\Theta + j\,A_o\,w\,\Theta = g\,\mathbf{I} \qquad (24)$$

$$\mathbf{E} = (R + j\,L\,w)\,\mathbf{I} + j\,g\,w\,\Theta \qquad (25)$$

Estas ecuaciones nos permitirán estudiar dos problemas importantes: la variación de Θ_m (E_m) por una parte y la de I (E) por otra.

4. Estudio de la variación de Θ_m (E_m). Sensibilidades en tensión sinusoidal y en intensidad ficticia en corriente sinusoidal. Sensibilidad máxima en volt. Coeficiente de reacción. — Eliminemos $\mathbf{I}$ entre las ecuaciones (24) y (25); se obtiene

$$\left[C - \left(K - \frac{g^2 L}{Z^2}\right) w^2\right]\Theta + j\left(A_o + \frac{g^2 R}{Z^2}\right) w\,\Theta = g\,\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} = g\,\mathbf{I}' \qquad (26)$$

donde

$$\mathbf{Z} = R + j\,L\,w = Z \angle \gamma \qquad (27)$$

designa la impedancia total del circuito con el órgano móvil del galvanómetro en reposo, e $\mathbf{I}' = \dfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}}$ es la corriente ficticia que atravesaría el aparato si su movimiento no introdujese ninguna fuerza electromotriz en el circuito; la corriente $\mathbf{I}'$ ([2]) sólo se confundiría

(1) Los vectores se representan por letras negritas; las amplitudes se distinguen por el subíndice m; los valores eficaces e instantáneos de las magnitudes eléctricas se representan por mayúsculas y minúsculas respectivamente.

(2) Por razones de comodidad adoptamos para las intensidades real y ficticia notaciones inversas a las empleadas en el capítulo V, 10.

con la real $\mathbf{I}$ si la f.e.m. $g\,w\,\Theta_m$ fuese despreciable frente a E_m.

La comparación de la ecuación (26) con la (24) demuestra que desde el punto de vista del movimiento, todo ocurre como si la f.e.m. $-g\frac{d\Theta}{dt}$ no existiese pero el momento de inercia del aparato hubiese disminuído en $\frac{g^2L}{Z^2}$ y el coeficiente de amortiguamiento hubiese aumentado en $\frac{g^2R}{Z^2}$.

Deducimos inmediatamente de (26)

$$\Theta_m = \frac{g\,E_m}{Z\sqrt{\left[C-\left(K-\frac{g^2L}{Z^2}\right)w^2\right]^2+\left[A_o+\frac{g^2R}{Z^2}\right]^2w^2}} =$$

$$= \frac{g\,I'_m}{\sqrt{\left[C-\left(K-\frac{g^2L}{Z^2}\right)w^2\right]^2+\left[A_o+\frac{g^2R}{Z^2}\right]^2w^2}} \qquad (28)$$

siendo la diferencia de fase entre Θ y $\mathbf{E}$

$$\varphi = \gamma + \psi' \qquad (29)$$

donde ψ' es la diferencia de fase entre Θ e $\mathbf{I}'$, dada por

$$\psi' = arctg\,\frac{\left(A_o+\frac{g^2R}{Z^2}\right)w}{C-\left(K-\frac{g^2L}{Z^2}\right)w^2} \qquad (30)$$

La relación (28) define la sensibilidad en tensión sinusoidal

$$S_{ta} = \frac{\Theta_m}{E_m}$$

y también la sensibilidad en intensidad ficticia en corriente sinusoidal

$$S'_{ia} = \frac{\Theta_m}{I'_m}$$

magnitud que hemos introducido por juzgarla interesante para la mejor comprensión de los fenómenos.

En lo sucesivo, al hablar de sensibilidades suprimiremos las

palabras "sinusoidal" o "en corriente sinusoidad", siempre que ello no preste a confusión.

En circuitos complejos E designa la d.d.p. entre los extremos de la rama del galvanómetro cuando ésta está abierta; la intensidad ficticia se calcula sin dificultad por el teorema de *Thévenin* generalizado, puesto que la impedancia del galvanómetro considerada no depende del movimiento.

A impedancia Z y pulsación w dadas, la variación de S'_{ia} o de S_{ta} en función de C (regulación usual) se representa por las curvas y (x) de la fig. 3, establecidas para el funcionamiento a corriente de amplitud constante. Se escribe

$$S'_{ia} = \frac{g}{\left(K - \frac{g^2 L}{Z^2}\right) w^2} \, \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + a^2}} = \frac{g}{\left(K - \frac{g^2 L}{Z^2}\right) w^2} \, y \quad (31)$$

donde

$$x = \frac{1}{w} \sqrt{\frac{C}{K - \frac{g^2 L}{Z^2}}} \quad (32)$$

y el parámetro a

$$a = \frac{A_o + \frac{g^2 R}{Z^2}}{\left(K - \frac{g^2 L}{Z^2}\right) w} \quad (33)$$

En particular, cualquiera que sea A_o, el máximo de S'_{ia} o de S_{ta} ocurre para $x = 1$, o sea para

$$C = \left(K - \frac{g^2 L}{Z^2}\right) w^2 \quad (34)$$

lo que da, sustituyendo en (28)

$$S_{ta\,max} = \frac{\Theta_{m\,max}}{E_m} = \frac{g}{Z A_o w\left(1 + \frac{g^2 R}{A_o Z^2}\right)} = \frac{1}{A_o w\left(\frac{Z}{g} + \frac{g R}{A_o Z}\right)} \quad (35)$$

y

$$S'_{ia\,max} = \frac{\Theta_{m\,max}}{I'_m} = S_{ta\,max} Z = \frac{g}{A_o w\left(1 + \frac{g^2 R}{A_o Z^2}\right)} = \frac{S_{ia\,max}}{h} \quad (36)$$

haciendo

$$h = 1 + \frac{g^2 R}{A_o Z^2} \quad (37)$$

Obsérvese que si se regula C para realizar la condición (19a), los valores de S_{ta} y S'_{ia} correspondientes pueden ser sensiblemente inferiores a sus máximos respectivos.

Veamos ahora la variación de la fase ψ'. Vale la relación $\psi = arctg \frac{a}{x^2 - 1}$ representada por las curvas de la fig. 4, pero con x y a definidos por (32) y (33) respectivamente. Cuando se realiza la condición (34) se tiene $\psi' = \frac{\pi}{2}$.

El examen de la relación (35) muestra inmediatamente que a R constante, la sensibilidad máxima en tensión pasa por un maximum maximorum para

$$\frac{Z}{g} = \frac{g\,R}{A_o\,Z} \tag{38}$$

con

$$S_{ta\,\underset{max}{max}} = \frac{\Theta_{m\,\underset{max}{max}}}{E_m} = \frac{1}{2w\sqrt{A_o\,R}} \tag{39}$$

Se puede pues poner (35) bajo la forma

$$S_{ta\,max} = S_{ta\,\underset{max}{max}} \frac{2\sqrt{\frac{R}{A_o}}\;\frac{g}{Z}}{1 + \left(\sqrt{\frac{R}{A_o}}\;\frac{g}{Z}\right)^2} \tag{40}$$

expresión del mismo tipo que la (38 a) del capítulo IV: $\frac{S_{ta\,max}}{S_{ta\,\underset{max}{max}}}$ en función de $\frac{R}{A_o}\;\frac{g^2}{Z^2}$ está dada por la curva de la fig. 7, IV. El máximo de esta curva, o sea $S_{ta\,\underset{max}{max}}$, es poco pronunciado, lo que es importante, porque reduce el interés de la regulación que realiza la condición (38), suplementaria de la regulación relativa a la condición (34), que, naturalmente, debe efectuarse siempre.

La regulación para realizar la condición (38) puede hacerse por acción sobre L (variación de Z a $R = Cte$), o sobre g. La constante g puede modificarse con relativa facilidad, cambiando las bobinas en los aparatos de imán móvil, y haciendo variar la inducción en el entrehierro en los aparatos de cuadro móvil.

Consideremos ahora la relación (36). A $g = Cte$, $S'_{ia\,max}$ aumenta

con Z, tendiendo hacia $S_{ia\ max}$. Haciendo variar g a Z constante, la sensibilidad máxima en intensidad ficticia pasa por un máximo cuando se cumple la condición (38), con

$$S'_{ia\ \underset{max}{max}} = \frac{g}{2\ A_o\ w} = \frac{S_{ia\ max}}{2} \qquad (41)$$

La sensibilidad maximum maximorum en intensidad ficticia a $Z = Cte$ es pues la mitad de la máxima en intensidad que se obtendría para el mismo valor de g en un circuito en que la fuerza electromotriz $g\,w\,\Theta_m$, inducida por el movimiento del órgano móvil del galvanómetro, fuera despreciable frente a la f.e.m. E_m que actúa en él.

Consideremos ahora el caso particular importante $L = 0$, o sea $Z = R$. La condición de resonancia es

$$C = K\ w^2 \qquad (19a)$$

en lugar de (34), resultado evidente a priori, porque en ausencia de self, todo pasa, por el hecho del movimiento, como si sólo el coeficiente de amortiguamiento de la ecuación de movimiento cambiase, pasando de A_o a $A_o + \frac{g^2}{R}$.

Las relaciones (35) y (36) se escriben

$$S_{ta\ max} = \frac{g}{A_o\,w\,R\left(1 + \frac{g^2}{A_o\,R}\right)} = \frac{S'_{ia\ max}}{R} \qquad (42)$$

Las sensibilidades máximas en tensión y en intensidad ficticia pasan a su vez por un máximo, a $R = Cte$, cuando se hace variar g para realizar

$$A_o = \frac{g^2}{R} \qquad (43)$$

con

$$S'_{ia\ \underset{max}{max}} = \frac{g}{2\ A_o\ w} = S_{ta\ \underset{max}{max}}\ R \qquad (44)$$

Compárense las relaciones (44) y (41). Veremos en el parágrafo 6 que en el funcionamiento regulado a maximum maximorum de sensibilidad, o sea cumpliéndose las condiciones (34) y (38),

el circuito, aún cuando tenga self, se comporta como puramente resistente.

El estudio que antecede demuestra que la sensibilidad máxima en intensidad es insuficiente para caracterizar la sensibilidad del aparato en un circuito en que $g\,w\,\Theta_m$ no es despreciable frente a E_m, y es necesario agregar otros datos. Se ha considerado a este efecto el funcionamiento en un circuito puramente resistente. A $g = Cte$, la sensibilidad máxima en intensidad ficticia se confunde prácticamente, si la resistencia del circuito es suficientemente grande, con la sensibilidad máxima en intensidad: es el caso límite estudiado en primer lugar. Cuando la resistencia del circuito disminuye, disminuye también la sensibilidad máxima en intensidad ficticia, que es lo menor posible cuando la resistencia es mínima, o sea cuando el galvanómetro está en corto-circuito. Se tiene entonces, teóricamente, $R = R_g$; es el segundo caso límite. Siempre a $g = Cte$, la sensibilidad máxima en tensión varía en sentido inverso que la sensibilidad máxima en intensidad ficticia: muy pequeña cuando R es muy grande, aumenta cuando R disminuye y alcanza el máximo para $R = R_g$. Este segundo caso límite ha servido para definir convencionalmente la sensibilidad máxima en volt, $S_{Va\,max}$, magnitud que se utilizó a los efectos de la clasificación de los galvanómetros, al lado de la sensibilidad máxima en intensidad. Se tiene

$$S_{Va\,max} = \frac{g}{A_o\,w\,R_g\left(1 + \dfrac{g^2}{A_o\,R_g}\right)} \tag{45}$$

En realidad lo que interesa es $S_{ia\,max}$ o $S'_{ia\,max}$ en un circuito dado de impedancia **Z**. Para calcularlas es cómodo introducir h_o, valor que toma en corto-circuito el coeficiente h, suponiendo despreciable la reactancia propia del aparato

$$h_o = 1 + \frac{g^2}{A_o\,K} = \frac{S_{Va\,max}\,R_g}{S_{ia\,max}} \tag{46}$$

Indicando $S_{ia\,max}$, R_g y h_o se puede prescindir en los catálogos de $S_{Va\,max}$, que sólo representa el valor máximo que puede tomar $S_{ia\,max}$. A h_o se le puede dar el nombre de *coeficiente de reacción*; veremos un poco más adelante que también presenta interés por otras razones.

Para un valor de g dado, la sensibilidad máxima en intensidad ficticia en un circuito de impedancia total Z y de resistencia total R, se calcula a partir de (36) y (46)

$$S'_{ia\ max} = \frac{S_{ia\ max}}{1 + (h_o - 1)\dfrac{R_g R}{Z^2}} \qquad (47)$$

y en el caso particular del circuito puramente resistente

$$S'_{ia\ max} = \frac{S_{ia\ max}}{1 + (h_o - 1)\dfrac{R_g}{R}} \qquad (48)$$

Por supuesto es equivalente calcular la sensibilidad máxima en tensión $S_{ta\ max} = \dfrac{S'_{ia\ max}}{Z}$ en vez de la máxima en intensidad ficticia.

El valor de h_o es el mayor que puede tomar h si el circuito es puramente resistente, pero no si la reactancia propia del aparato es importante. En este último caso se tendrá en corto circuito

$$h'_o = 1 + \frac{g^2 R_g}{A_o Z_g^2} \qquad (49)$$

expresión que aumenta agregando una resistencia en serie con R_g si $R_g < L_g w$. Hay que observar que es siempre h'_o y no h_o lo que se mide experimentalmente, y es el valor de h'_o el que debería servir para calcular $S_{ta\ max}$ o $S'_{ia\ max}$. Así el denominador de la relación (47) se escribiría

$$h = 1 + (h'_o - 1)\frac{Z_g^2 R}{R_g Z^2}$$

pero como en general se tiene prácticamente $Z_g = R_g$, la relación (47) es suficiente.

Si el valor de h_o es grande, el empleo del galvanómetro de resonancia es en general poco cómodo: en efecto, su amortiguamiento varía entonces mucho con la impedancia del circuito y, como veremos, no solamente la sensibilidad máxima, sino también otras propiedades del galvanómetro resultan afectadas, por ser función del

amortiguamiento. Para disminuir h_0 se puede aumentar A_0; para esto se agrega por ejemplo una espira en corto-circuito si se trata de un galvanómetro de cuadro móvil (hay que tener en cuenta que el momento de inercia cambia) o bien, si se trata de un aparato de imán móvil, se hace oscilar el imán cerca de una masa de cobre. Sin embargo la elección de A_0 está en general impuesta por el conjunto de propiedades del aparato (ver el parágrafo 11), y la regulación de h_0 se hace obrando sobre g.

La sensibilidad máxima en volt es un caso particular de la sensibilidad máxima en tensión; pasa pues por un maximum maximorum cuando se cumple la condición (43) donde se hace $R = R_g$, o sea para $h_0 = 2$. No obstante, ciertos autores aconsejan un valor de h_0 menor (p. ej. $1,5$ según *Schering*) para que las características del aparato dependan poco de la resistencia del circuito; la disminución de la sensibilidad máxima en volt no es muy grande, porque, como dijimos, el maximum maximorum es poco pronunciado. En los aparatos muy sensibles en intensidad se tratará evidentemente de hacer g lo mayor posible.

Observemos que en el caso de los galvanómetros de imán que contienen hierro se debe tomar como R_g el valor de la resistencia de las bobinas, medida en corriente alterna, con el sistema móvil quitado; así se puede tener en cuenta la variación aparente de la resistencia debida a las pérdidas en el hierro, que no estaría comprendida en una medida en corriente continua.

5. Sensibilidades prácticas máximas por microampere y por microvolt en corriente sinusoidal de pulsación dada. — La sensibilidad práctica máxima (o en resonancia) por microampere en corriente sinusoidal de pulsación dada, $S_{\mu A\, max^{-1}}$, se define como el ancho (doble de la amplitud de la oscilación) del spot, leído sobre una escala graduada en mm, colocada a 1m del espejo, producido por una corriente sinusoidal de esa pulsación, de valor eficaz igual a 1 μ A, cuando se cumple la condición (19) de resonancia. Hay que recordar que esta definición sólo vale a corriente de amplitud constante, es decir, cuando la fuerza contraelectromotriz $g\, w\, \Theta_m$ es despreciable frente a la f.e.m. E_m que obra en el circuito. Resulta pues, estando I_m en ampere

$$S_{\mu A\, max^{-1}} = \frac{2\, d_{max}\ \text{mm}}{\text{Dm}(I_m \,/\, \sqrt{2})\, 10^6} = \frac{2\,\Theta_{m\, max}}{I_m / \sqrt{2}} \cdot \frac{2.10^3}{10^6} = 4\ \sqrt{2}.10^{-3}\, S_{ia\, max} =$$

$$= 4\sqrt{2}.10^{-3}\frac{g}{A_o\, w_o} \text{ mm/m.}\mu\text{A} \qquad (50)$$

donde A_o, g y w_o están evidentemente expresados en un sistema coherente que tenga el ampere como unidad de corriente. Si con la misma regulación del aparato se determina $S_{\mu A}{}^{-1}$, sensibilidad práctica por microampere en corriente continua del galvanómetro [capítulo **IV, 6**, fórmula (19)], resulta inmediatamente

$$\frac{S_{\mu A}{}^{-1}}{S_{\mu A\, max}{}^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\;\frac{A_o}{2\sqrt{KC}} = \frac{\alpha_o}{\sqrt{2}} \qquad (51)$$

En la misma forma se define la sensibilidad máxima práctica por microvolt en corriente sinusoidal de pulsación dada como el ancho del spot, leído sobre una escala graduada en mm, colocada a 1m del espejo, producido por una d.d.p. sinusoidal de esa pulsación, de valor eficaz igual a 1 μ V, aplicada en los bornes del galvanómetro, cuando se cumple la condición de resonancia. Resulta

$$S_{\mu V_{max}}{}^{-1} = \frac{2\, d_{max}\,\text{mm}}{D\text{m}(U_m/\sqrt{2})\; 10^6} = \frac{2\;\Theta_{m\;max}}{U_m/\sqrt{2}}\cdot\frac{2.10^3}{10^6} =$$

$$= 4\sqrt{2}.10^{-3}\, S_{V\alpha\; max} = 4\sqrt{2}.10^{-3}\frac{g}{A_o\, w\, Z_g\, h'_o} \cong$$

$$\cong 4\sqrt{2}.10^{-3}\frac{g}{A_o\, w_o\, R_g\, h_o} \text{ mm/m.}\mu\text{V} \qquad (52)$$

observando que la reactancia del aparato es en general despreciable.

Se escribe, teniendo en cuenta (50)

$$S_{\mu V max}{}^{-1} = \frac{S_{\mu A\; max}{}^{-1}}{Z_g\, h'_o} \cong \frac{S_{\mu A\; max}{}^{-1}}{R_g\, h_o} \qquad (53)$$

relación de la que se deduce h_o.

6. Circuito equivalente del galvanómetro de resonancia. — Eliminemos Θ entre las ecuaciones (24) y (25); se obtiene

$$\mathbf{E} = \mathbf{I}\left\{\left[R + \frac{A_o\, w^2\, g^2}{(C - K\, w^2)^2 + A_o{}^2\, w^2}\right] + \right.$$

$$\left. + jw\left[L + \frac{(C - K\, w^2)\, g^2}{(C - K\, w^2)^2 + A_o{}^2\, w^2}\right]\right\} = \mathbf{I}\,(R' + j\,L'w) \qquad (54)$$

donde $R^{\prime}$ y $L^{\prime} w$ reciben los nombres de resistencia y reactancia efectivas (equivalentes) del circuito. A causa del movimiento del órgano móvil todo pasa como si la resistencia y la reactancia del circuito aumentasen respectivamente en

$$r = \frac{A_o w^2 g^2}{(C - K w^2)^2 + A_o{}^2 w^2} \tag{55}$$

y

$$lw = \frac{(C - K w^2) w g^2}{(C - K w^2)^2 + A_o{}^2 w^2} \tag{56}$$

que se llaman resistencia y reactancia de movimiento respectivamente. Haciendo

$$D = \frac{g^2}{A_o} \quad \text{y} \quad tg\, \xi = \frac{C - K w^2}{A_o w}$$

(55) y (56) se escriben

$$r = \frac{D}{1 + tg^2 \xi} = D \cos^2 \xi \quad \text{y} \quad lw = \frac{D\, tg\, \xi}{1 + tg^2 \xi} = D \operatorname{sen} \xi \cos \xi$$

que demuestran que el lugar de los extremos del vector $\mathbf{Z} = r + j\, lw = Oa$ (fig. 7) es la circunferencia de diámetro $OA = D = \frac{g^2}{A_o}$.

Este resultado ha sido encontrado experimentalmente por *Kennelly* y sus colaboradores.

Se ve fácilmente que en un circuito con self donde se cumplen las condiciones (34) y (38) se tiene $r = R$ y $lw = - Lw$ o sea $R^{\prime} = 2R$ y $L^{\prime}w = 0$. El circuito se comporta como puramente resistente, su reactancia es anulada por la reactancia de signo contrario introducida por el movimiento del órgano móvil. Este resultado ya ha sido mencionado en el parágrafo 4. Se tiene entonces

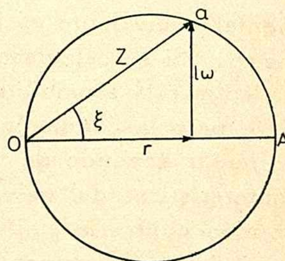


Fig. 7

$$I_m = \frac{E_m}{2R} = \frac{E_m - \frac{E_m}{2}}{R}$$

Todo pasa como si el galvanómetro anulase la reactancia del circuito e introdujese una fuerza contra-electromotriz de amplitud $\frac{E_m}{2}$.

Consideremos el caso de un circuito sin reactancia ($L = o$) y supongamos primero que se ha realizado la condición (19a) $C = K w^2$; se tiene $r = \frac{g^2}{A_o}$, $lw = o$; el punto a se sitúa en A (fig. 7). El efecto de la fuerza contra-electromotriz E_c se puede asimilar aquí a un simple aumento de la resistencia R del circuito, resultado evidente a priori si se observa que $E_c = -j g w \Theta$ está a $\frac{\pi}{2}$ atrás de Θ y en la resonancia Θ está a $\varphi = \psi' = \frac{\pi}{2}$ atrás de E: E_c y E están en oposición. Si no se cumple la condición de resonancia (19a), el punto representativo no está en A, y por el hecho del movimiento el galvanómetro introduce una reactancia, de self si $w_o > w$, de capacidad si $w_o < w$.

La impedancia de movimiento debe conocerse para poder calcular la corriente I que realmente pasa por el galvanómetro, pero no para calcular y discutir la indicación del mismo. A este último efecto basta determinar la intensidad ficticia I', lo que es inmediato, y considerar la sensibilidad máxima en intensidad ficticia $S'_{ia\ max}$; si se prefiere, se puede también partir de la d.d.p. E en los bornes de la rama del galvanómetro cuando está abierta y de la sensibilidad máxima en tensión $S_{ta\ max}$; la impedancia del circuito elemental equivalente es la del circuito real visto desde el galvanómetro. Si se calculase I, para determinar la desviación se debería aplicar la sensibilidad en intensidad S_{ia}, dada por la relación (16), pero la condición simple (19a) de máximo de S_{ia} ya no vale porque I depende de la impedancia de movimiento, o sea de las características del galvanómetro. Por lo tanto, y a pesar de la opinión contraria emitida por varios autores, la impedancia de movimiento no presenta interés para el estudio de la indicación del galvanómetro, para la elección del transformador intermedio (parágrafo 13), etc.

7. Sensibilidad máxima en intensidad del galvanómetro de resonancia a diversas frecuencias. — El par director C puede regularse entre los valores C_1 y C_2, de modo que el aparato es apto para funcionar entre las pulsaciones w_1 y w_2 correspondien-

tes. La relación $S_{ia\ max} = \frac{g}{A_o w}$ muestra que la sensibilidad máxima en intensidad disminuye cuando $w = w_o$ aumenta; para definir más exactamente la ley de esta disminución en los aparatos en que se hace variar la longitud de los hilos de suspensión, hay que observar que a causa de la histéresis elástica A_o aumenta en forma notable si se disminuye mucho la longitud de dichos hilos para hacer crecer la frecuencia propia.

Para ensanchar el intervalo de frecuencias de empleo del aparato se utilizan sistemas móviles intercambiables.

El momento de inercia del órgano móvil a frecuencias elevadas debe ser muy pequeño, lo que no deja de ocasionar dificultades. En efecto, el valor mínimo aceptable del brillo limita la reducción de las dimensiones del espejo; por otra parte la disminución del número de espiras del cuadro o de las dimensiones del imán se traduce por una reducción de g y es preciso aumentar g para conservar un valor satisfactorio de $S_{ia\ max}$ no obstante el valor elevado de w.

8. Sensibilidad a las armónicas. — El galvanómetro de resonancia debe ser poco sensible a las armónicas; en caso contrario, al emplearlo como aparato de cero, y no obstante no pasar corriente a la frecuencia fundamental, el galvanómetro puede acusar una oscilación debida a las armónicas, que falsea las medidas. Para darse cuenta de la influencia de las armónicas en el caso más general, es necesario considerar la sensibilidad en tensión (o, si se quiere, en intensidad ficticia), pero para tener una idea del orden de magnitud de esa influencia nos basta considerar el caso límite de funcionamiento a corriente de amplitud constante. El resultado así obtenido valdrá también para la sensibilidad en tensión si el circuito es puramente resistente a condición de reemplazar A_o por $A_o h$.

La amplitud de la oscilación debida a la armónica $i_n = I_{mn}\ sen\ nwt$ es

$$\Theta_{mn} = \frac{g\, I_{mn}}{\sqrt{(C - K n^2 w^2)^2 + A_o{}^2 n^2 w^2}} \qquad (57)$$

y si $C = K w^2$ (galvanómetro en resonancia sobre la onda fundamental) resulta

$$\Theta_{mn\ res} = \frac{g\, I_{mn}}{C \sqrt{(1 - n^2)^2 + 4 n^2 \alpha_o{}^2}} \qquad (58)$$

Como α_o es en general muy pequeño, la sensibilidad correspondiente a la armónica n se puede escribir

$$S_{ia\,n} \cong \frac{S_i}{n^2 - 1} \tag{59}$$

$S_{ia\,n}$ es casi independiente del amortiguamiento y varía aproximadamente en razón inversa al cuadrado del orden de la armónica.

Por el contrario la sensibilidad relativa a las armónicas (inversa de la selectividad)

$$\frac{S_{ia\,n}}{S_{ia\,max}} = \frac{2\,\alpha_o}{n^2 - 1} \tag{60}$$

que es la característica realmente importante, depende del amortiguamiento, y es tanto menor cuanto menor es α_o, resultado evidente a priori, ya que la curva de resonancia es entonces más aguda.

En el caso general del circuito con reactancia, el resultado depende también de la impedancia del circuito, que es diferente para la onda fundamental y para las armónicas.

9. Influencia de la variación de la frecuencia. Ancho de resonancia. — *Wenner* definió el ancho de resonancia como la variación relativa de la frecuencia que reduce Θ_m a la mitad de su valor máximo. Consideremos el caso del galvanómetro funcionando a corriente de amplitud constante; expresemos que para $w = w_1$, $\Theta_{m\,1}$ es la mitad de $\Theta_{m\,max}$, indicación correspondiente a $w = w_o$

$$\Theta_{m1} = \frac{g\,I_m}{\sqrt{(C - K\,w_1{}^2)^2 + A_o{}^2\,w_1{}^2}} = \frac{1}{2}\;\frac{g\,I_m}{A_o\,w_o} \tag{61}$$

de donde, teniendo en cuenta que α_o es pequeño

$$w_1 \cong w_o\,(1 \pm \alpha_o \sqrt{3}\,) \tag{62}$$

Resulta pues

$$a = \frac{w_1 - w_o}{w_o} \cong \pm\,\alpha_o \sqrt{3} \tag{63}$$

En el circuito a tensión constante se parte de la relación (28); la variación de la impedancia del circuito con la frecuencia es un factor muy importante. La amplitud de la osilación

$$\Theta_m = S_{ta}\,E_m = S'_{ia}\,I'_m$$

depende a la vez de $S'_{ia}(w)$ y de $I'_m(w)$. Así en un circuito dado donde la corriente ficticia I'_m está en resonancia eléctrica para w' (fig. 8), mientra que $S'_{ia}(w)$ tiene su máximo para w'', el producto $S'_{ia}\ I'_m$, o si se prefiere $S_{ia}(E_m = Cte)$, puede ser mantenido sensiblemente constante entre w' y w'': se obtiene así un galvanómetro de sensibilidad en tensión prácticamente constante en una amplia gama de frecuencias. Es el principio del galvanómetro de *Meissner* y *Adelberger* (ver al parágrafo 20).

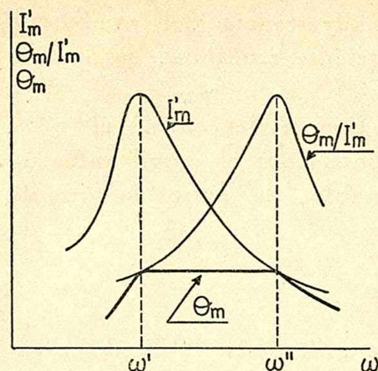


Fig. 8

En un circuito puramente resistente, se puede admitir en primera aproximación que, a tensión constante, se tiene también

$$a \cong \pm \alpha \sqrt{3}$$

donde

$$\alpha = \alpha_0 h$$

10. Régimen transitorio: duración de extinción. —El movimiento del órgano móvil en régimen transitorio está dado por la superposición de los relativos a los regímenes libre y estacionario.

Sea $i = I_m\, sen\,(wt + \varphi)$ la corriente, y $\Theta = \Theta_m\, sen\,(wt + \varphi - \psi)$ la desviación en régimen estacionario; observando que en los galvanómetros de resonancia el movimiento propio es siempre periódico amortiguado, el movimiento resultante en régimen transitorio es

$$\Theta = Ae^{-bt}\, sen\,(b''t + \zeta) + \Theta_m\, sen\,(wt + \varphi - \psi) \qquad (64)$$

donde A y ζ sólo dependen de las condiciones iniciales (ver p.ej. la fig. 20 del capítulo **I, 16** para el caso de $w/w_0 = 0.95$, $\alpha = 0{,}05$, partiendo el móvil del cero y del reposo).

El régimen estacionario se establece al cabo de cierto tiempo tanto mayor cuanto menor es el amortiguamiento. Hay interés en que prácticamente ese tiempo no sea superior a *2—3* segundos, porque las medidas se hacen largas y penosas. Por ejemplo, supongamos que se busca el equilibrio de un puente haciendo variar la impedan-

cia de una de sus ramas. Al anularse la corriente, el galvanómetro vuelve al cero, pero si ese retorno es muy lento, el operador puede atribuir la lentitud a la modificación insuficiente de la impedancia que está regulando y continúa la regulación, pasando del valor de equilibrio. No existiendo la advertencia del cambio de sentido de la desviación, como en corriente continua, la medida se ve comprometida.

Se debe pues tener en cuenta el tiempo de retorno al cero; como el número de oscilaciones efectuadas por el móvil antes de estabilizarse el movimiento es considerable, se aplica la fórmula 117 del capítulo **I, 10**:

$$\frac{t_r}{T_o} = \frac{\log_e n}{2\pi\alpha}$$

El tiempo necesario para que la amplitud sea 1/100 de su valor primitivo es pues

$$t_{r\,100} = 0{,}73\,\frac{T_o}{\alpha} = \frac{0.73}{\alpha f_o} \qquad (65)$$

y para que sea 1/10 de su valor primitivo, tiempo tomado frecuentemente como base de comparación

$$t_{r\,10} = \frac{1}{2}\,t_{r\,100} = \frac{0.37}{\alpha f_o} \qquad (66)$$

11. Resumen de la influencia del amortiguamiento sobre las características del aparato. — Consideremos el funcionamiento a corriente de amplitud constante. Hemos visto que el amortiguamiento obra sobre:

1) la sensibilidad práctica máxima por microampere $S_{\mu A\,max}{}^{-1} = S_{\mu A}{}^{-1}\,\frac{\sqrt{2}}{\alpha_o}$, tanto mayor cuanto menor es α_o.

2) la inversa de la selectividad, o sensibilidad relativa a las armónicas, tanto menor cuanto menor es α_o.

3) el ancho de resonancia $a = \frac{w_1 - w_o}{w_o} \cong \alpha_o\sqrt{3}$, tanto menor ($w_1$ más próximo a w_o) cuanto menor es α_o.

4) el tiempo de retorno al cero $t_{r\,10} = \frac{0.37}{\alpha_o f_o}$ tanto mayor cuanto menor es α_o.

Así por ejemplo, para $\alpha_o = 0{,}002$, la sensibilidad práctica por microampere en resonancia es 707 veces la del aparato en corriente

continua, y la sensibilidad a la armónica 3 es $1/2000$ de la relativa a la onda fundamental. Una variación de $a = 0,34\ ^\circ/_\circ$ en la frecuencia de alimentación reduce Θ_{max} a la mitad, y a la frecuencia de 50 Hz hay que esperar $3,7$ segundos para que en régimen transitorio el ancho del spot no difiera del correspondiente al nuevo régimen estacionario en más del $10\ ^\circ/_\circ$ de la variación sufrida: es aproximadamente el tiempo que hay que esperar después de realizada una modificación en la rama de un circuito para estar seguros de su influencia sobre la desviación.

La constancia de la frecuencia de la fuente es pues una guía en la elección de α_o, que podrá ser tanto menor cuanto más estable sea la frecuencia. Pero no conviene exagerar en ese sentido para que la duración de la extinción no sea excesiva; si se fija $t_{r\,10} = 1$ s resulta $\alpha_o = \frac{0,37}{f_o}$, o sea $\alpha_o = 0,0074$ a 50 Hz.

En el caso de disponer de un galvanómetro de resonancia muy poco amortiguado, se puede agregar una espira en corto-circuito sobre el cuadro, si el aparato es de cuadro móvil, o hacer oscilar la aguja sobre una masa de cobre de posición generalmente regulable, si el aparato es de imán móvil En ciertos casos se puede aumentar el amortiguamiento shuntando el galvanómetro, lo que equivale a abandonar el funcionamiento a intensidad de amplitud constante.

Si el circuito es puramente resistente, en el funcionamiento a tensión constante vale lo que se dijo sobre la influencia del amortiguamiento en los puntos 1), 2), 3) y 4), reemplazando α_o por $\alpha = \alpha_o\, h$; de aquí la importancia del factor h. Se observará que en el punto 1) en vez de $S_{\mu A\ max}^{-1}$ se debe considerar ahora $S'_{\mu A\ max}{}^{-1}$, sensibilidad práctica ficticia por microampere: $S'_{\mu A\ max}{}^{-1} = 4\sqrt{2}.10^{-3} S'_{ia\ max}$.

12. Shunt. Resistencias adicionales. — La discusión del problema del shuntado es análoga a la hecha en el parágrafo 13 del capítulo IV, a propósito de los galvanómetros de corriente continua. Consideremos el circuito elemental que comprende en serie la f.e.m. $e = E_m \operatorname{sen} \omega t$, una impedancia Z_e que incluye la del generador y el galvanómetro de impedancia Z_g cuando el órgano móvil está en reposo. Shuntemos el galvanómetro por una impedancia Z_s. La corriente ficticia en el galvanómetro, primitivamente

$$I'_1 = \frac{E}{Z_e + Z_g} \qquad (67)$$

pasa a ser

$$I'_2 = \frac{E}{m Z_e + Z_g} \qquad (68)$$

donde

$$m = \frac{Z_g + Z_s}{Z_s} \qquad (69)$$

Como en corriente continua, se observa que si Z_e es pequeña frente a Z_g la acción del shunt es poco marcada; para reducir la corriente ficticia a $\frac{1}{m}$ de su valor es necesario, o bien que Z_g sea despreciable frente a Z_e, como ocurre en el caso límite de funcionamiento a corriente de amplitud constante, o bien que se mantenga constante la impedancia del circuito visto desde la fuente, agregando en serie con el conjunto galvanómetro shunt una impedancia de compensación $Z_g \left(1 - \frac{1}{m}\right)$.

Pero después de shuntado el galvanómetro, la indicación varía, no solamente porque cambia la corriente ficticia, sino también a causa de la modificación de la sensibilidad en intensidad ficticia, que depende del valor de la impedancia del circuito visto desde el galvanómetro; esta impedancia, primitivamente igual a $Z_g + Z_e$, se transforma en $Z_g + \frac{Z_e Z_s}{Z_e + Z_s}$. Puede ser éste un medio de aumentar el amortiguamiento, y por consiguiente el ancho de resonancia de un aparato, pero a condición de que, por una parte, la disminución de la corriente en el galvanómetro sea admisible y, por otra parte, h_0 tenga un valor suficientemente elevado; en muchos aparatos se trata actualmente de hacer h_0 igual o inferior a 2, y la acción sobre el ancho de resonancia por shuntado pierde en gran parte su interés.

Se puede mantener constante la sensibilidad en intensidad ficticia cuando se shunta el aparato, por medio de impedancias adicionales elegidas de modo que la impedancia del circuito visto desde el galvanómetro sea constante; pero tal procedimiento carece de interés práctico.

El shuntado es generalmente útil durante las primeras tentativas de búsqueda del equilibrio, cuando el galvanómetro se emplea como aparato de cero.

13. Empleo del galvanómetro de resonancia con transformador. Volvamos a considerar el circuito elemental del parágrafo prece-

dente. Se puede aumentar la indicación del galvanómetro alimentándolo por medio de un transformador. Nos limitaremos a estudiar el caso de un transformador ideal, de resistencias propias, fugas y corriente magnetizante despreciables. En tal caso, designando por k la relación entre el número de espiras secundarias (lado galvanómetro) y el número de espiras primarias, la f.e.m. reducida al lado secundario será $k\mathrm{E}$ y la impedancia total reducida al mismo lado será $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_e\, k^2$. Tenemos pues

$$\Theta_{m\,max} = k E_m\, S_{ta\,max}$$

de donde, teniendo en cuenta la relación (35)

$$\frac{\Theta_{m\,max}}{E_m} = \frac{g}{A_o\, w} \; \frac{k}{Z + \dfrac{g^2}{A_o} \; \dfrac{R_g + R_e\, k^2}{Z}} \tag{70}$$

En particular, si $Z_g << Z_e\, k^2$, $R_g << R_e\, k^2$

$$\frac{\Theta_{m\,max}}{E_m} = \frac{g}{A_o\, w} \; \frac{k}{Z_e\, k^2 + \dfrac{g^2}{A_o} \; \dfrac{R_e}{Z_e}} \tag{71}$$

expresión que pasa por un máximo para

$$k^2 = \frac{g^2}{A_o} \; \frac{R_e}{Z_e^{\,2}} = (h_o - 1) \; \frac{R_g\, R_e}{Z_e^{\,2}} \tag{72}$$

valor que no siempre es compatible con la hipótesis de partida.

Como otro caso particular consideremos el caso del circuito puramente resistente; $\mathbf{Z}_e = R_e$, $\mathbf{Z}_g = R_g$. Se tiene

$$\frac{\Theta_{m\,max}}{E_m} = \frac{g}{A_o\, w} \; \frac{k}{R_e\, k^2 + R_g\, h_o} \tag{73}$$

expresión que pasa por un máximo para

$$k^2 = \frac{R_g\, h_o}{R_e} \tag{74}$$

Los transformadores empleados son en general de tomas múltiples para extender su posibilidad de empleo.

14. Determinación experimental de las constantes del galvanómetro de resonancia.

1) *Determinación de* $S\mu_A{}^{-1}$. La sensibilidad práctica por microampere en corriente continua se obtiene como en los galvanómetros de corriente continua (ver capítulo VI, 6). Recuérdese que $S\mu_A{}^{-1}$ depende del valor dado al par director.

2) *Determinación de* $S\mu_{A\,max}{}^{-1}$ *y de* α_0. La frecuencia de la fuente debe ser muy constante. Si la tensión es demasiado elevada se la reduce por un transformador T (fig. 9), y se aplica una parte de la tensión secundaria al galvanómetro de resonancia, en serie con una gran resistencia r frente a la cual la impedancia efectiva del galvanómetro es completamenta despreciable. Sea I la corriente en el galvanómetro, expresada en ampere; se calcula

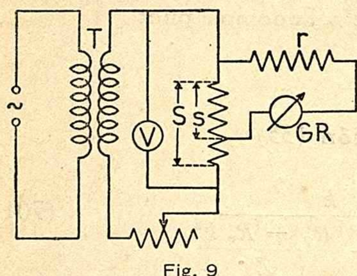


Fig. 9

$I = \frac{Us}{S(r+s) - s^2}$ y se deduce en la resonancia

$$S\mu_{A\,max}{}^{-1} = \frac{2\,d_{max}\ \text{mm}}{D\ \text{m}\ I\ 10^6} \qquad (75)$$

Si es necesario se aplica la corrección del arco tangente. La relación (51) da α_0.

3) *Medida de la resistencia* R_g. Se hace con corriente continua salvo en los galvanómetros de resonancia de imán con núcleo de hierro, en los que la medida debe hacerse en corriente alterna con el sistema móvil separado o bloqueado. En este caso se debe estudiar la influencia de la frecuencia.

4) *Medida del coeficiente de self-inducción* L_g. Se hace en un puente adecuado, con el órgano móvil separado o bloqueado.

5) *Determinación de* $S\mu_{V\,max}{}^{-1}$ *y de* h_0. Se emplea el esquema de la fig. 9 donde se suprime r y se da a s un valor muy pequeño, despreciable frente a la resistencia efectiva del galvanómetro de resonancia. La d.d.p. en los bornes de s es (estando abierto el circuito del galvanómetro) $E = U\frac{s}{S}$, y la impedancia del circuito visto desde el galvanómetro es $\mathbf{Z} = R_g + jL_g w + \frac{s(S-s)}{S}$ de donde

$$Z=\sqrt{\left[R_g+\frac{s}{S}(S-s)\right]^2+L_g{}^2\,w^2}\cong Z_g$$

si s es suficientemente pequeño. Se deduce, en la resonancia, estando E en volt

$$S\mu\, v_{max}{}^{-1}=\frac{2\,d_{max}\,\mathrm{mm}}{\mathrm{Dm}\,E\,10^6} \qquad (76)$$

En este ensayo, como en el 2), es necesario que la frecuencia de la fuente sea muy constante.

La relación (53) da h_o.

6) *Determinación de la pulsación ideal de un galvanómetro con determinada regulación.* Se alimenta el circuito de la fig. 9 con una fuente de frecuencia regulable y conocida. Manteniendo constante la corriente que pasa por el galvanómetro, se regula la frecuencia de la fuente hasta que la desviación sea máxima; se tiene entonces

$$w=w_o\sqrt{1-2\,\alpha_o{}^2}\cong w_o$$

7) *Determinación completa de las constantes del galvanómetro.* De las relaciones (19a), (46), (50) y $\alpha_o=\dfrac{A_o}{2\sqrt{KC}}$ se deduce

$$K=16.10^{-6}\,\frac{(h_o-1)\,R_g}{(S\mu_{A\,max}{}^{-1})^2\,w_o{}^3\,\alpha_o}\ U.G. \qquad (77)$$

Obsérvese que el valor de K obtenido experimentalmente no representa el momento de inercia del órgano móvil propiamente dicho sino ligeramente aumentado (en $\sim 1\ °/_o$) por la vibración del aire que lo rodea.

$$C=16.10^{-6}\,\frac{(h_o-1)\,R_g}{(S\mu_{A\,max}{}^{-1})^2\,w_o\,\alpha_o}\ U.G. \qquad (78)$$

$$A_o=32.10^{-6}\,\frac{(h_o-1)\,R_g}{(S\mu_{A\,max}{}^{-1})^2\,w_o{}^2}\ U.G. \qquad (79)$$

$$g=5{,}65.10^{-3}\,\frac{(h_o-1)\,R_g}{S\mu_{A\,max}{}^{-1}\,w_o}\ U.G. \qquad (80)$$

La discusión de los ensayos deberá hacerse de acuerdo con los criterios expuestos en el capítulo VI.

15. Diferentes tipos de galvanómetros de resonancia. — Hay que distinguir entre los aparatos que tienen una frecuencia ideal única y los que admiten un número teóricamente infinito de frecuencias ideales, fundamental y armónicas; estos últimos se estudiarán en el capítulo siguiente.

Los aparatos de frecuencia ideal única usuales se dividen en dos grandes grupos: galvanómetros de imán móvil y galvanómetros de cuadro móvil. Los primeros son sensibles a los campos magnéticos exteriores de frecuencia igual a la de resonancia, que los pueden hacer vibrar sin que sus bornes estén reunidos a un circuito de medida; esa es precisamente una manera de verificar la existencia de tales campos parásitos. Estos galvanómetros se protejen en general por medio de pantallas magnéticas y se les debe mantener alejados de todo aparato que produzca campos perturbadores importantes, como ser transformadores con fugas considerables, bobinas de electroimanes, etc.

Los galvanómetros de resonancia de cuadro no son prácticamente influenciados por los campos exteriores. Los hilos de suspensión son finos y están muy tensos, lo que hace que se rompan con cierta facilidad.

Ambas clases de aparatos son muy sensibles a las vibraciones mecánicas a la frecuencia de resonancia; si es necesario, deben ser colocados sobre soportes antivibratorios.

Los galvanómetros de imán se emplean sobre todo a frecuencias inferiores a $\sim$ 150 Hz; a frecuencias superiores son preferibles los de cuadro.

Los galvanómetros pueden agruparse según la manera de producir el par director. En los aparatos de imán, el par director se debe, generalmente, a la acción conjunta de la elasticidad (casi siempre la torsión del hilo de suspensión) y de un campo magnético constante, producido por un imán o electroimán; la importancia relativa de estos pares varía según el modelo. En los aparatos de imán antiguos la regulación se efectuaba obrando sobre el par elástico; es el caso del galvanómetro de *Rubens* o del de *Wien*; este último ni siquiera tenía imán director. Pero ya en el de *Rubens* la regulación fina se hacía desplazando los imanes directores, y en los galvanómetros actualmente empleados la regulación se hace obrando sobre el imán permanente, cuya posición se hace variar (*Rump*) o que se shunta (*Drysdale, Agnew*) (obser-

vemos que en el aparato de *Agnew* el hilo se somete a flexión y no a torsión) o sobre la excitación de un electroimán (*Schering-Schmidt, Rump, Meissner-Adelberger, Blondel*).

Cuando se emplea un imán permanente el aparato es fácilmente transportable, pero los valores de la inducción obtenidos son menores.

En los galvanómetros de cuadro móvil el par director se debe generalmente sólo a la elasticidad de los hilos de suspensión; la regulación se efectúa obrando sobre la longitud (regulación gruesa) y la tension (regulación fina) de estos hilos. Pero se han realizado aparatos donde se agrega al par elástico un par director electromagnético, regulable a distancia (*Vuylsteke*).

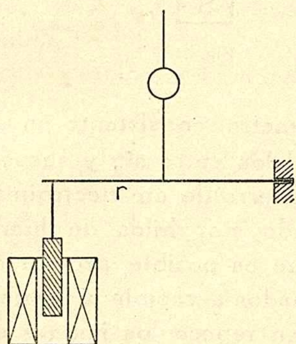


Fig. 10

La regulación continua a distancia de la frecuencia ideal por modificación del campo director es fácil en los aparatos de imán móvil con electroimán (parágrafos 18, 22); pero también se puede regular de manera continua y a distancia la tensión del hilo (*Silsbee*, según *Kennelly*). Se dispone a este efecto de un electroimán que atrayendo un núcleo flexa una lámina elástica r, a la que se fija la extremidad inferior del hilo de suspensión (fig. 10).

El par motor de los galvanómetros de cuadro móvil se calcula como en corriente continua (capítulo III, **1**). En los galvanómetros de imán móvil dicho cálculo ya no es exactamente el mismo que en continua (capítulo II, **1**), porque a causa de la presencia del hierro la determinación del campo es algo diferente; pero en general es fácil hacer un cálculo aproximado.

16. Teléfono óptico y galvanómetro de Wien. — Indiquemos el primer modelo del teléfono óptico de *Wien*, que puede ser considerado como prototipo de los galvanómetros de resonancia (fig. 11). Una pequeña pieza p de hierro dulce, fija sobre una membrana m, está sometida a la acción de un imán permanente NS que lleva un enrollamiento A recorrido por la corriente a revelar. La pieza vibra; su vibración se amplifica por medio de una palanca l y un resorte r que lleva en su extremo un espejo M, que refleja el rayo incidente sobre una escala. Después el sistema se modifi-

có un poco; se emplearon dos imanes en forma de *U*, situados de un lado y otro de la membrana, que obraban cada uno sobre una pieza de hierro dulce. La frecuencia ideal sólo se puede regular dentro de un intervalo muy reducido, variando la distancia entre los imanes y la membrana; se llegó a obtener una sensibilidad práctica máxima en intensidad del orden de 3 mm/m.μA. El amortiguamiento era elevado. Sería necesario disponer de toda una serie de membranas para responder a las diferentes frecuencias.

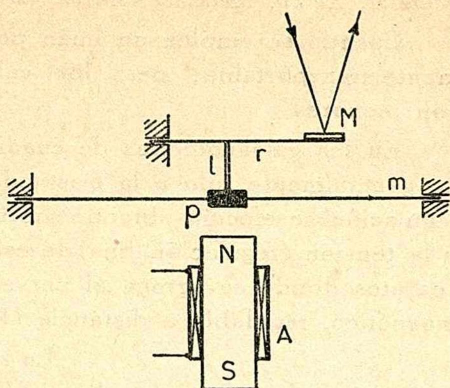
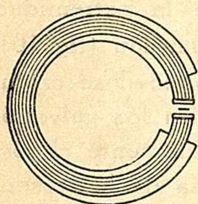


Fig. 11

Wien construyó también un galvanómetro consistente en algunos imanes de 3 mm de longitud, paralelos entre sí, y suspendidos por un hilo de bronce en el entrehierro de un electroimán en forma de toro cuyo núcleo está formado por hilos de hierro (fig. 12). Lleva cuatro enrollamientos que es posible acoplar de diversas maneras, destinados a recibir la corriente alterna a estudiar. En reposo los imanes están dirigidos paralelamente a las caras del entrehierro. La resonancia se obtiene obrando sobre la longitud del hilo de suspensión.


Fig. 12

El amortiguamiento se aumenta reduciendo el entrehierro por deformación del toro, ya que así crecen las pérdidas en el hierro; se lo hace más enérgico pegando plaquetas de cobre sobre las caras que delimitan el entrehierro.

Cuando las cuatro bobinas están en serie se indica una sensibilidad $S_{\mu A_{max}}{}^{-1} = 70$ mm/m.μA a 100 Hz; $\alpha_o = 0{,}015$.

17. Galvanómetro de Rubens. — Consiste en un juego de 20 pequeños imanes soldados a una cinta de bronce y suspendidos por un hilo de bronce en un campo creado por dos imanes en forma de *U*, con los polos de igual nombre enfrentados (fig. 13a). Los imanes llevan bobinas recorridas por la corriente a revelar, dispuestas de tal modo que cuando los polos situados sobre una

diagonal están reforzados, los de la otra diagonal están debilitados; los papeles de las diagonales se invierten en cada semi-período. En ausencia de corriente en las bobinas, las fuerzas *F* (fig. 13 b) mantienen el imán en la dirección del campo director; se puede admitir en primera aproximación que al enviar la corriente todo pasa como si las fuerzas *F* sufrieran los incrementos *f* dirigidos normalmente y que forman el par motor. La regulación aproximada del par director se hace obrando sobre la longitud del hilo de suspensión, que se hace variar por medio de dos puentes desplazables. La regulación fina se obtiene, sea obrando sobre la tensión del hilo, sea alejando o aproximando los imanes de la aguja.

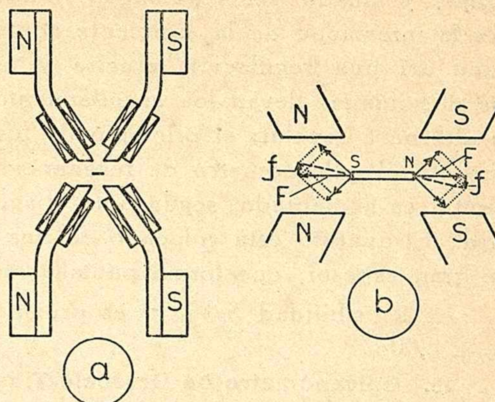


Fig. 13

Se obtiene una sensibilidad $S_{\mu A\,max}^{-1}$ del orden de 15 mm/m.μA a 100 Hz; $\alpha_o \cong 0{,}01$; $h_o \cong 2{,}5$.

18. Galvanómetro de imán de Schering y Schmidt. — Es un perfeccionamiento del aparato de *Rubens* (fig. 14). Una simple aguja imantada reemplaza los numerosos imanes del galvanómetro de *Rubens*; se dispone de dos sistemas intercambiables; uno de ellos se emplea entre 10 y 75 Hz y las dimensiones de su imán son 6 x 4 x 0,18 mm; el otro se emplea entre 30 y 160 Hz y su imán tiene 4 x 4 x 0,6 mm. La suspensión es de bronce fosforoso, de ~ 3 cm de longitud y 0,02 mm de diámetro. El amortiguamiento se regula por medio de una pieza de cobre que se

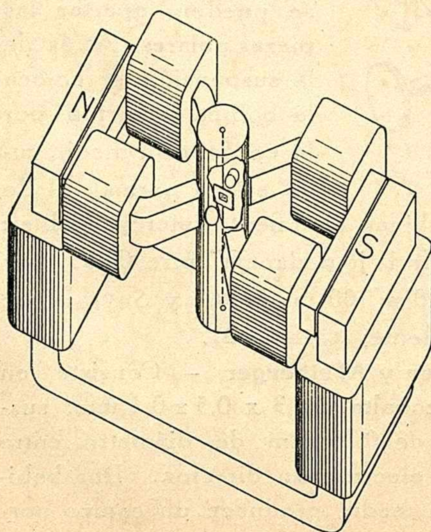


Fig. 14

puede acercar o alejar de la aguja. Un gran electroimán en *U* lleva un enrollamiento recorrido por corriente continua; el flujo magnético creado es canalizado por un par de imanes hasta la aguja, y puede ser regulado a voluntad por simple acción sobre la intensidad de la corriente continua de excitación: se obtiene así una regulación precisa y fácil del par director. Estos dos imanes llevan los enrollamientos que reciben la corriente alterna a revelar; el principio de funcionamiento es el mismo que el del galvanómetro de resonancia de *Rubens*, es decir, el campo es aumentado según una diagonal y disminuído según la otra. El aparato está colocado en una caja de fundición o chapa de gran espesor, que forma pantalla magnética.

La sensibilidad $S_{\mu A\,max}^{-1}$ es próxima a 10 mm/m. μA a 50 Hz; $\alpha_0 \cong 0{,}006$.

19. Galvanómetro de Drysdale-Tinsley. -- Una aguja de hierro dulce está suspendida por un hilo de seda entre los polos de un imán permanente *NS* (fig. 15). El par director se debe principalmente a la acción de un campo regulable gracias al desplazamiento de un shunt magnético, cuya posición está dada por un índice. También se pueden apartar las piezas polares. Atrás de la suspensión se coloca la bobina recorrida por la corriente a medir, cuyo eje es normal al de la aguja. El aparato tiene varias bobinas, fácilmente intercambiables; así a 50 Hz se puede hacer variar la impedancia entre 0,005 Ω y 17500 Ω, pasando $S_{\mu A\,max}^{-1}$ de 0,08 a 100 mm/m.μA y $S_{\mu V\,max}^{-1}$ de 16 a 0,005 mm/m.μV respectivamente; $\alpha_0 \cong 0{,}001$.

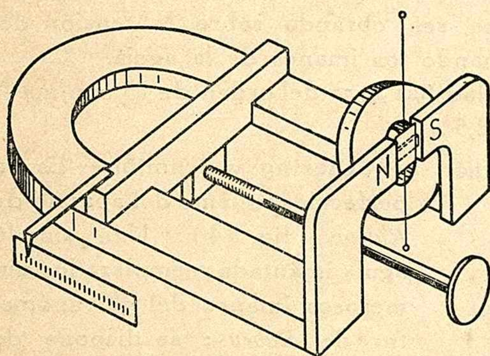


Fig. 15

20. Galvanómetro de Meissner y Adelberger. — Consiste en 2 pequeños imanes de acero al cobalto de 3 x 0,5 x 0,1 mm, suspendidos por un hilo de bronce de 0,15 mm de diámetro entre las piezas polares cónicas de un electroimán director. Dos bobinas, recorridas por la corriente a medir, producen un campo normal al campo director. La resonancia se obtiene actuando so-

bre la corriente de excitación del electroimán. La originalidad del sistema consiste en la adjunción de una capacidad en serie en el circuito del galvanómetro, que produce la resonancia eléctrica de la corriente para una pulsación determinada w'; la forma de esta curva de resonancia se puede regular fácilmente agregando resistencias. La curva de la resonancia mecánica $S'_{ia}(w)$ pasa por su máximo para una frecuencia w'' (fig. 8) y de acuerdo con lo que se ha dicho en el parágrafo 9, la sensibilidad en tensión se mantiene constante para un intervalo de frecuencias importante; así a 62 Hz una variación de la frecuencia de 23 °/₀ sólo afecta la sensibilidad S_{ta} en $\sim$ 0,5 °/₀; se tiene $S_{\mu A\ max}^{-1} = 500$ mm/m.μA, $S_{\mu V\ max}^{-1} = 1{,}25$ mm/m.μV.

21. Galvanómetro de Blondel y Carbenay. — Este aparato fué utilizado en el análisis de la forma de onda de las corrientes alternas. Una pequeña paleta de hierro dulce está colocada en el eje de dos solenoides idénticos coaxiales, a igual distancia de ambos. Los solenoides están alimentados por corriente continua. Una pequeña bobina de eje normal al de los solenoides está recorrida por la corriente a medir o revelar. La resonancia se obtiene actuando sobre la corriente continua. El aparato permite trabajar con frecuencias elevadas, hasta 1500 Hz.

22. Galvanómetro de Rump. — El aparato está representado en la fig. 16 b. Existen varios sistemas móviles intercambiables; cada uno de ellos consiste en una aguja imantada, de muy pequeñas dimensiones (las del imán más pequeño, de una aleación especial de hierro y platino, son 0,4 — 0,5 x 0,7 x 0,05 mm) suspendida de un hilo de capullo de seda en el campo director existente entre las piezas polares de un electroimán E excitado por corriente continua. Un segundo electroimán e, que produce un campo normal al campo director, está recorrido por

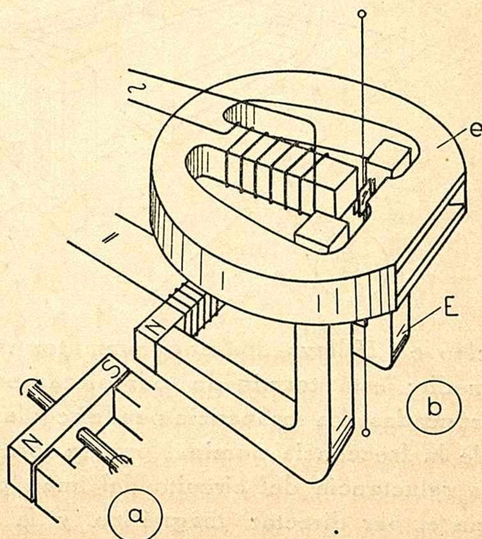


Fig. 16

la corriente alterna a medir o revelar. La observación se hace a través de un orificio previsto en el núcleo de e. Se obtiene un amortiguamiento enérgico por medio de una chapita de cobre próxima al imán. Esta construcción ha permitido aumentar las sensibilidades, que a 50 Hz llegan a 785 mm/m.μA y 7,4 mm/m.μV; $\alpha_o \cong 0{,}005$.

Se construye también un modelo análogo, pero con imán permanente (fig. 16 a). Se regula el campo director haciendo girar el imán frente a las piezas polares fijas. Las sensibilidades a 50 Hz son 72 mm/m.μA y 0,72 mm/m.μV; $h_o = 2$, $\alpha_o = 0{,}007$.

Los aparatos están protegidos por pantallas magnéticas de ferroníquel.

23. Galvanómetro de Agnew. — Un hilo de hierro de 3,3 cm de longitud, y de diámetro igual a 0,04 mm para 25 Hz y a 0,1 mm para 60 Hz, está fijo a un imán permanente NS (fig. 17a). Un nú-

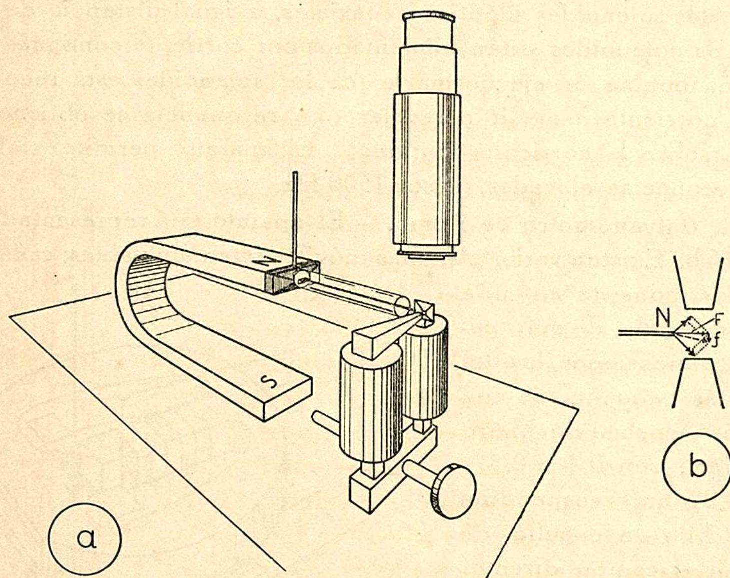


Fig. 17

cleo en U lleva dos enrollamientos recorridos por la corriente a medir; está terminado por piezas polares en forma de pirámides truncadas. La resonancia puede regularse en un intervalo de $\sim 5\,\%$ de la frecuencia nominal por un tornillo de hierro, que modifica la reluctancia del circuito del imán permanente y en consecuencia el par director magnético y la frecuencia ideal del hilo de hierro. Para un metal dado, y a igualdad de campo, esta fre-

cuencia es sensiblemente proporcional al diámetro e inversamente proporcional al cuadrado de la longitud del hilo. En ausencia de la corriente a medir, la fuerza F que se ejerce sobre el polo norte del hilo (fig. 17 b) está dirigida según éste; cuando se envía la corriente, en primera aproximación todo pasa como si se agregara, normalmente a la precedente, la fuerza motora f. Este esquema simplificado es análogo al de un polo del aparato de *Rubens*, (parágrafo 17, fig. 13 b) pero la fuerza directora magnética varía más, durante el desplazamiento del hilo, que en el aparato de *Rubens*. La vibración del hilo se hace en un plano horizontal, y se observa con un microscopio. La sensibilidad depende de la distancia del hilo a las piezas polares; el hilo está protegido por un tubo de vidrio. Con un aumento de 100 y con bobinas de 1 Ω se puede revelar una d.d.p. de 1 μ V; con bobinas de 270 Ω, una corriente de 0,05 μA; $\alpha_0 \cong 0{,}006$.

24. Galvanómetro de Duddell. — *Blondel* fué el primero en construir un galvanómetro de frecuencia propia elevada, que consiste en dos hilos paralelos tensos, que empleó como oscilógrafo. Como vimos en el parágrafo 2, basta disminuir el amortiguamiento de este aparato para poderlo emplear como galvanómetro de resonancia. *Duddell* lo construyó en una forma que permite emplearlo cómodamente entre las frecuencias de 70 y 700 Hz. La corriente a medir recorre un simple bucle de hilo de bronce, que pasa por una pequeña polea, mantenida por un resorte r (fig. 18). Dos puentes a y a' pueden desplazarse permaneciendo equidistantes del espejo soportado por los hilos; se hace así variar la longitud de los hilos y por consiguiente el par director. La regulación fina se hace obrando sobre la tensión de los hilos por medio del resorte r. El inconveniente del aparato consiste en que el espejo, que debe ser sumamente pequeño, da un spot poco luminoso. La sensibilidad del aparato es bastante elevada (60 mm/m.μA a 100 Hz).

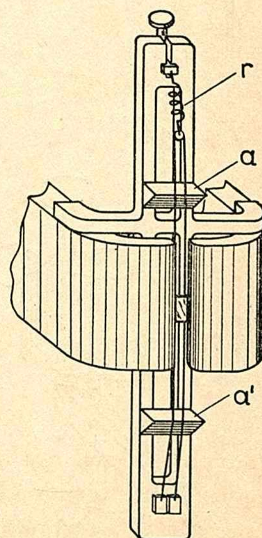


Fig. 18

Este galvanómetro pertenece en realidad a la clase de aparatos con un número teóricamente infinito de frecuencias ideales propias, y debe ser considerado no como un cuadro formado por dos hilos y sometido a un par, sino como dos cuerdas unidas entre sí por el espejo y sometidas a fuerzas repartidas. Volveremos sobre este tema en el capítulo siguiente; nos limitaremos a indicar aquí que si la masa del espejo es suficiente, el aparato tiene pequeña sensibilidad a las armónicas de la frecuencia fundamental, siendo pues selectivo (*Butterworth*).

Schering y *Schmidt* construyeron un galvanómetro análogo pero con un bucle de un metro de longitud para poder trabajar a entre 25 y 125 Hz. Se tenía $S_{\mu A\,max}{}^{-1} = 10$ mm/m.μA a 25 Hz, $\alpha_o = 0{,}007$ $h_o = 1{,}4$.

25. Galvanómetro de Campbell y similares. — Es un galvanómetro de cuadro con cuadro de muy pequeñas dimensiones. Primitivamente la suspensión superior consitía en un hilo de seda y la inferior era bifilar y conducía la corriente; más tarde *Campbell* hizo las dos suspensiones metálicas, primero bifilares, y monofilares en los modelos más recientes. Se hace una regulación aproximada obrando sobre la longitud de la suspensión superior por medio de una cremallera y un puente móvil, y una regulación fina obrando sobre un resorte que tiende más o menos la suspensión (fig. 19). El cuadro está colocado en el entrehierro de un poderoso imán permanente. De acuerdo con lo indicado en el parágrafo 7, la sensibilidad disminuye rápidamente cuando aumenta la frecuencia; por eso el aparato posee cierto número de cuadros fácilmente intercambiables, que permiten cubrir el intervalo 10—1200 Hz en buenas condiciones de sensibilidad. Se tiene $S_{\mu A\,max}{}^{-1} = 60$ mm/m.μA a 50 Hz; $\alpha_o \cong 0{,}002$. El valor de h_o es elevado

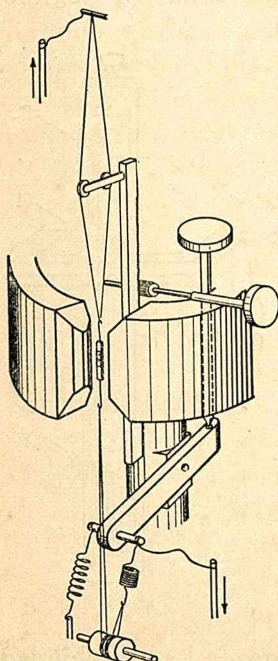


Fig. 19

Zöllich construyó un galvanómetro muy sensible basado en el mismo principio, con $h_o = 2$, $S_{\mu A\,max}{}^{-1} = 250$ mm/m.μA a 25 Hz, $\alpha_o = 0{,}015$.

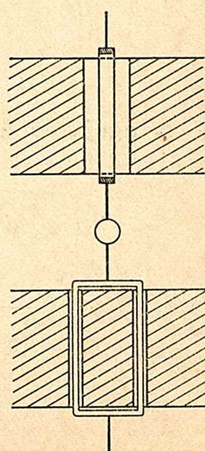
Si el momento de inercia del cuadro es muy pequeño y el de los hilos de sus-

pensión no es despreciable, se pueden observar resonancias a frecuencias armónicas. El fenómeno es análogo al mencionado en el aparato de Duddell.

Gall construyó un aparato en el que se regulan simultáneamente la longitud y la tensión de los hilos, provisto de una escala circular donde se lee directamente la frecuencia de resonancia $w_o = \sqrt{\frac{C}{K}}$ correspondiente a una regulación dada, que puede variar por ejemplo entre 15 y 70 Hz; tres sistemas móviles permiten cubrir la zona entre 3 y 300 Hz. La regulación es así simple y rápida; $S_{\mu A\, max}^{-1} = 40$ mm/m.μA a 50 Hz.

Rothwell construyó un galvanómetro con 12 cuadros, destinado a investigaciones acústicas. Se previeron los cuadros para resonar a frecuencias crecientes dentro del intervalo 128 y 197 Hz en progresión geométrica de razón 104/100; están colocados uno al lado del otro en el entrehierro de un electroimán. Los espejos están pegados normalmente a los planos de los cuadros, y las imágenes se forman una encima de otra. Los cuadros están conectados en serie.

26. Galvanómetro de Vuylsteke. — El sistema móvil comprende dos cuadros, a 90° entre sí (fig. 20); el cuadro inferior, principal, está colocado entre los polos de un electroimán o de un imán permanente (el autor recomienda el empleo de un electroimán); el cuadro superior, auxiliar, está colocado entre los polos de un electroimán y su posición en reposo es normal a las líneas de fuerza. El cuadro principal está recorrido por la corriente a revelar; el cuadro auxiliar está recorrido por una corriente i cuya intensidad se puede regular. En esas condiciones el par director es el elástico aumentado en el par $C_1 = a\, i$ que obra sobre el cuadro auxiliar. Si el cuadro auxiliar estuviese conectado en los bornes de una resistencia colocada en serie con la bobina de su propio electroimán se tendría $C_1 = a' i^2$, lo que puede ser interesante en ciertos casos. Tanto el amortiguamiento por el aire e histéresis elástica como el electromagnético suplementario debido a la presencia del cuadro auxiliar, son pequeños. El aparato tendría la


Fig. 20

ventaja de la regulación fácil, entre grandes límites, del par director, que se hace a distancia; el autor no indica la sensibilidad.

27. Galvanómetros de más de un grado de libertad. Resonancia anormal. — En todo lo que precede se supuso que el galvanómetro poseía un solo grado de libertad (en general rotación alrededor del eje de simetría del aparato), y que, salvo observación contraria, los coeficientes K, A_0, C, g, de la ecuación de movimiento, eran constantes. Pero el aparato no es completamente rígido en sentido lateral, y una asimetría de construcción un poco importante puede traducirse por un movimiento adicional de translación. *Jones* mostró que en ese caso la curva de resonancia presenta dos máximos separados por un mínimo, y es análoga a las curvas de resonancia que se encuentran en el estudio de dos circuitos eléctricos oscilantes, fuertemente acoplados. Tal curva ha sido observada por cierto número de autores, por ejemplo *Rosa* y *Grover*, *Zöllich*, etc

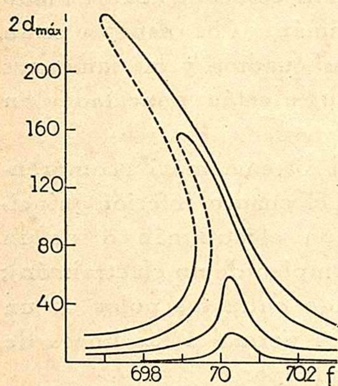


Fig. 21

Cuando los coeficientes de la ecuación no pueden ser considerados constantes, la curva de resonancia resulta más o menos deformada: así *Appleton* señala, en un galvanómetro de resonancia tipo *Drysdale*, la existencia de una zona donde se pueden obtener tres valores de la desviación para una misma intensidad, dos estables y uno inestable (fig. 21) y atribuye el fenómeno a que el par director no es proporcional al ángulo de desviación y a que la imantación de la aguja es función de la posición de ésta en el campo.

Nota anexa: Teléfono.

No podemos terminar este capítulo sin decir algunas palabras sobre el teléfono, tan utilizado como aparato de cero a frecuencias acústicas: en efecto, el estudio simplificado de su funcionamiento es análogo al estudio del galvanómetro de resonancia.

28. Estudio simplificado del funcionamiento. — Nos basta considerar el teléfono del tipo electromagnético. Es sabido que el modelo común (*Bell*) consiste en una membrana de hierro atraída por las piezas polares de un imán permanente (fig. 22), o, más raramente, de un electroimán. Las piezas llevan dos bobinas recorridas por la corriente a revelar.

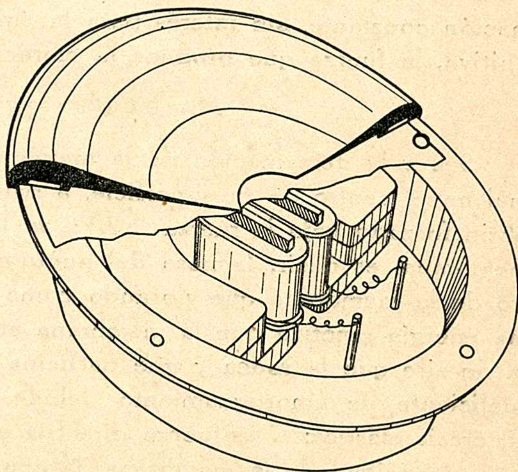


Fig. 22

En otros modelos, la atracción se ejerce sobre una paleta de hierro solidaria a una membrana que es plana (*Baldwin*) o cónica (*Brown*).

Si se admite que la permeabilidad de las partes ferromagnéticas del circuito magnético es constante, hipótesis que aquí es sensiblemente válida, la fuerza equivalente de atracción, que supone-

mos, para simplificar, concentrada y obrando en el centro de la membrana, será en cada instante proporcional al cuadrado de la inducción resultante B_r

$$F = k\, B_r^{\,2} \qquad (81)$$

siendo

$$B_r = B + B' \qquad (82)$$

donde B es la inducción debida al imán permanente y B' el incremento de la misma debido a la corriente i que atraviesa las bobinas. Tanto B como B' dependen de la distancia de la membrana a las piezas polares, pero como la amplitud de las vibraciones es siempre pequeña se puede admitir, en primera aproximación, que

$$B = Cte$$

y que

$$B' = a\, i$$

donde a es una constante.

Resulta pues

$$F = k\,(B + a\, i)^2 = k\,(B^2 + 2\,B\,a\,i + a^2\, i^2) \qquad (83)$$

El término $k\, a^2\, i^2$ es generalmente despreciable frente a $2\,k\,B\,a\,i$; el término $k\,B^2$ sólo imprime a la membrana una deformación constante, sin interés para la emisión del sonido. En definitiva, la fuerza que produce la vibración es

$$F' = 2\,k\,B\,a\,i = g\,i \qquad (84)$$

Sea x la deformación de la membrana contada sobre la normal en el centro de su superficie, a partir de la posición de equilibrio forzado bajo la fuerza $k\,B^2$; m la masa equivalente de la membrana, es decir, la masa del punto material situado en el centro de la membrana que vibrando como ese centro posee la misma energía cinética que la membrana entera, comprendida la masa de aire que la rodea y que participa en el movimiento; A_o el coeficiente de amortiguamiento debido a los frotamientos y a la histéresis elástica; C la fuerza directriz unitaria equivalente debida a la elasticidad de la membrana; la ecuación de movimiento es

$$m\,\frac{d^2 x}{dt^2} + A_o\,\frac{dx}{dt} + Cx = F' = g\,i \qquad (85)$$

Supongamos que el teléfono esté conectado en serie con una impedancia y un generador de f.e.m. $e = E_m\, sen\, w\, t$; sea $\mathbf{Z} = R + jLw$

la impedancia total de este circuito elemental cuando la membrana del teléfono está en reposo. La vibración de la membrana induce una f.e.m. $-g\frac{dx}{dt}$, de manera que se tiene

$$e - g\frac{dx}{dt} = Ri + L\frac{di}{dt} \tag{86}$$

Las ecuaciones (85) y (86) son idénticas a las (22) y (23) que definen el funcionamiento del galvanómetro de resonancia bajo tensión de amplitud constante (parágrafo 3) y las conclusiones relativas al galvanómetro valen para el teléfono, especialmente

$$x_m = \frac{g\,E_m}{Z\sqrt{\left[C - \left(m - \frac{g^2 L}{Z^2}\right) w^2\right]^2 + \left(A_o + \frac{g^2 R}{Z^2}\right)^2 w^2}} =$$

$$= \frac{g\,I'_m}{\sqrt{\left[C - \left(m - \frac{g^2 L}{Z^2}\right) w^2\right]^2 + \left(A_o + \frac{g^2 R}{Z^2}\right)^2 w^2}} \tag{87}$$

idéntica a (28). Por el hecho de su vibración, la membrana introduce en el circuito una impedancia de movimiento cuyo lugar es la circunferencia de la fig. 7; sus componentes están dadas por las fórmulas (55) y (56) donde se reemplaza K por m; I' es la corriente ficticia que pasaría por el teléfono si no existiera la impedancia de movimiento.

Si la impedancia del circuito es lo suficientemente grande como para poder despreciar frente a E la f.e.m. inducida por la vibración de la membrana, se escribe simplemente

$$x_m = \frac{g\,I_m}{\sqrt{(C - m\,w^2)^2 + A_o{}^2\,w^2}} \tag{88}$$

con

$$I'_m = \frac{E_m}{Z} = I_m$$

siendo (88) idéntica a (3).

Pero hay una diferencia esencial entre el teléfono y el galvanómetro de resonancia; el primero sólo puede servir como aparato de cero, porque no se mide la deformación de la membrana correspondiente a una d.d p. dada; sólo se aprecia la menor d.d.p. que produce un sonido perceptible: interviene pues la influencia

del operador. La curva de resonancia del teléfono es la de la menor corriente o tensión que produce un sonido perceptible, en función de la frecuencia.

Generalmente el teléfono está desprovisto de órganos de regulación, aunque en ciertos casos se puede hacer variar la distancia de la membrana a las piezas polares, o también ejercer una presión en un punto excéntrico de la membrana. *Abraham* construyó un modelo en el que la membrana estaba soportada por dos hilos paralelos, tensos, de tensión regulable.

Dimensionando convenientemente el aparato, se pueden obtener frecuencias de resonancia relativamente bajas, por ejemplo del orden de 500 Hz.

Hay que observar que en realidad la curva de resonancia del teléfono suele presentar varios máximos, de agudeza desigual, no explicados por la teoría precedente, a causa de las aproximaciones hechas.

La analogía del teléfono con el galvanómetro de resonancia puede continuarse: este último puede servir como oscilógrafo siempre que su frecuencia propia sea suficientemente elevada y que su amortiguamiento sea conveniente, en particular, tal que la sensibilidad permanezca aproximadamente constante en un amplio intervalo de frecuencias (ver capítulo XI); por el contrario, como galvanómetro debe ser selectivo. Del mismo modo, el teléfono, como aparato receptor reproductor del sonido debe ser fiel a todas las frecuencias, y como aparato de cero debe ser selectivo, sensible a la frecuencia de trabajo e insensible a las otras. Si esta condición no se cumple, por no disponer de teléfono conveniente o de fuente de frecuencia regulable, y si se trabaja con frecuencias muy inferiores a la de resonancia, se corre el peligro de que una armónica falsee la medida. Por el contrario, si se puede hacer que el teléfono trabaje a la frecuencia correspondiente al máximo de sensibilidad, el aparato es muy sensible, permitiendo revelar corrientes menores de 10^{-8} *A*.

BIBLIOGRAFÍA

1. **H. Abraham** — *C. R. Acad. Sc.* t. 144, p. 906 y 1154, 1907.
2. **P. G. Agnew** — *B. of St. Bull.* No. 370, t. 16, p. 37, 1920, o *Trans. Am. Inst. El. Eng.*, t. 39, p. 359, 1920.
3. **C. V. Appleton** — *Phil. Mag.* t. 47, p. 609, 1924, o *R. G. E.* t. 16, p. 233, 1924.
4. **A. Blondel** — *C. R. Acad. Sc.*, t. 116, p. 502 y 748, 1893; *Ann. de Physique* t. 10, p. 195, 1918.
5. **A. Blondel y F. Carbenay** — *Ann. de Physique* t. 8, p. 97, 1917.
6. **S. Butterworth** — *Proc. Phys. Soc.* t. 24, p. 75, 1912 y t. 26, p. 264, 1914.
7. **A. Campbell** — *Proc. Phys. Soc.* t. 20, p. 626, 1907, o *Phil. Mag.* t. 14, p. 494, 1907; *Proc. Phys. Soc.* t. 25, p. 203, 1913; t. 26, p. 120, 1914 y t. 31, p. 85, 1919.
8. **A Campbell y E. C. Childs** — The measurement of inductance, capacitance and frequency — Macmillan and Co, London, 1935.
9. **W. Duddell** — *Proc. Phys. Soc.* t. 21, p. 774, 1909, o *Phil. Mag.* t. 18, p. 168, 1909.
10. **D. C. Gall** — *Journ. Sc. Instr.* t. 5, p. 134, 1928.
11. **E. Giebe y H. Schering** — *Zs. f. Instrkde.* t. 26, p. 151, 1906.
12. **B. Hague** — Alternating current bridge methods—Pitman, London, 1938.
13. **H. Hausrath** — *Phys. Zs.* t. 10, p. 750, 1909.
14. **H. F. Haworth** — *Proc. Phys. Soc.* t. 24, p. 230, 1912, y t. 25, p. 264, 1913.
15. **R. L. Jones** — *Proc. Phys. Soc.* t. 35, p. 67, 1923.
16. **A. E. Kennelly** — Electrical vibration instruments — The Macmillan Co, New York, 1923.
17. **A. E. Kennelly, R. N. Hunter, y A. A. Prior** — *Trans. Am. Inst. El. Eng.* t. 39, p. 443, 1920.
18. **A. E. Kennelly y G. W. Pierce** — *Am. Acad. Sc.* t. 47, p. 113, 1912.
19. **A. E. Kennelly y H. O. Taylor** — *Am. Phil. Soc. Proc.* t. 55, p. 415, 1916.
20. **W. Meissner y V. Adelberger** — *Zs. f. techn. Phys.* t. 11, p. 102 y p. 143, 1930, y t. 13, p. 475, 1932.
21. **H. Mühlenhöver** — Disertación, Münster i. W. 1905.
22. **E. B. Rosa y F. W. Grover** — *B. of St. Bull.* t. 1, p. 298, 1905.
23. **P. Rothwell** — *Journ. Sc. Instr.* t. 2, p. 251, 1925.
24. **H. Rubens** — *Ann. der Phys.* t. 56, p. 27, 1895.
25. **W. Rump** — *Phys. Zs.* t. 40, p. 493, 1939 o *E. T. Z.* t. 60, p. 1318, 1939.
26. **H. Schering** — *Zs. f. Instrkde.* t. 38, p. 11, 1918, y t. 39, p. 140, 1919.
27. **H. Schering** — Handbuch der Physik, t. 16, p. 304 — Springer, Berlin, 1927.

28. **H. Schering y R. Schmidt** — *Zs. f. Instrkde.* t. 38, p. 1, 1918, y *Arch. f. El.* t. 1, p. 254, 1912.

29. **H Tinsley** — *The. El.* t. 69, p. 939, 1912.

30. **R. P. Wells** — *Phys. Rev.* t. 23, p. 504, 1906.

31. **F. Wenner** — *B. of St. Bull.* t. 6, p. 347, 1909; t. 6, p. 365, 1910 y *Trans. Am. Inst. El. Eng.* t. 31, p. 1243, 1912.

32. **M. Wien** — *Wied. Ann.* t. 42, p. 593, 1891; t. 44, p. 680, 1891 y t. 58 p. 125, 1896.

33. **H. A. Vuylsteke** — *R. G. E.* t. 37, p. 537, 1935.

34. **H. Zöllich** — *Arch. f. El.* t. 3, p. 369, 1915.

CAPITULO VIII.

Galvanómetros de cuerda y de bucle.

1. Principio de los galvanómetros de cuerda. Sensibilidad en intensidad. — Según el vocabulario electrotécnico internacional, el galvanómetro de cuerda o de vibración es un "galvanómetro cuya parte móvil está constituída por un hilo que puede vibrar entre las piezas polares de un imán o de un electroimán". Vamos a precisar el principio de funcionamiento del aparato y hallar su sensibilidad.

Sea ab (fig. 1) un hilo conductor de metal no magnético, sin rigidez y tenso, vertical, de longitud Y, de muy pequeña sección. El hilo, recorrido por una corriente I, está colocado en un campo magnético uniforme dirigido normalmente al plano de la figura, en el sentido del lector hacia la figura, para precisar las ideas. Se suponen fijos los extremos a y b. Designemos por **B** al vector inducción del campo; de acuerdo con la ley de *Laplace*, sobre un elemento $MM' = dl$ del hilo se ejerce la fuerza

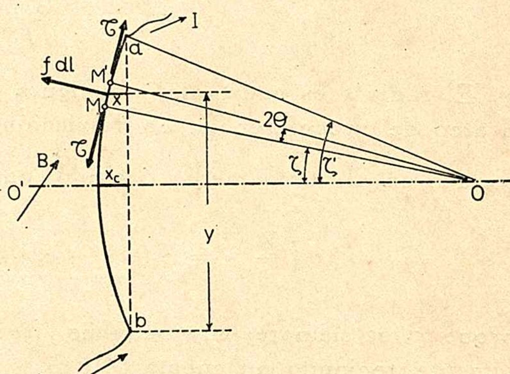


Fig. 1

$$\mathbf{dF} = I\,\mathbf{dl} \wedge \mathbf{B} \qquad (1)$$

o sea, por unidad de longitud

$$f = \frac{dF}{dl} = BI \qquad (2)$$

dirigida en cada punto normalmente al hilo.

Supondremos despreciable la acción de la gravedad; por consiguiente la componente tangencial f_t de las fuerzas repartidas que obran sobre el hilo es nula y la tensión $\mathfrak{T}$ del hilo es constante, de acuerdo con la relación

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dl} = - f_t = 0$$

Designemos por 2Θ el ángulo infinitamente pequeño formado por MO y $M'O$, normales al hilo en M y M'. El elemento MM' se encuentra en equilibrio bajo la acción de las tensiones $\mathfrak{T}$ y de la fuerza electromagnética $f\,dl$. La proyección de esas tres fuerzas sobre la bisectriz del ángulo $M\,O\,M'$ da

$$f\,dl = 2\mathfrak{T}\, sen\, \Theta \cong \mathfrak{T} .\, 2\,\Theta = \mathfrak{T}\,\frac{dl}{r} \qquad (3)$$

llamando r al radio de curvatura del elemento $M\,M'$. Se deduce

$$r = \frac{\mathfrak{T}}{f} = \frac{\mathfrak{T}}{B\,I} \qquad (4)$$

El radio r es constante y la figura de equilibrio del hilo es un arco de circunferencia. La desviación máxima, o flecha, x_c, se produce en el punto medio del hilo, para $y = \frac{Y}{2}$. Resulta

$$\left(\frac{Y}{2}\right)^2 = x_c\,(\,2\,r - x_c\,) \cong 2\,r\,x_c \qquad (5)$$

porque x_c es siempre muy pequeño frente a $2\,r$. Se obtiene finalmente, teniendo en cuenta (4)

$$x_c = \frac{Y^2}{8\,r} = \frac{BY^2}{8\mathfrak{T}}\,I \qquad (6)$$

La desviación de un elemento cualquiera, $M\,M'$, de ordenada y, se obtiene fácilmente. En efecto (fig. 1)

$$x = x_c\,\frac{cos\,\zeta - cos\,\zeta'}{1 - cos\,\zeta'} \cong 4\;x_c\left(\frac{y}{Y} - \frac{y^2}{Y^2}\right) \qquad (7)$$

observando que ζ', y a fortiori ζ, son lo suficientemente pequeñas como para poner $\cos \zeta' = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \zeta'$ Se ve que las aproximaciones hechas permiten confundir el arco de circunferencia con un arco de parábola.

A partir de la relación (6) se define la sensibilidad en intensidad en corriente continua del aparato

$$S_i = \frac{x_c}{I} = \frac{BY^2}{8\mathfrak{T}} \tag{8}$$

La flecha x_c se observa generalmente con un microscopio; si G es el aumento, la desviación observada es $d = Gx_c$, y se puede definir la sensibilidad práctica en ampere en corriente continua

$$S_A = \frac{I}{d} = \frac{8\mathfrak{T}}{BY^2G} \tag{8a}$$

Puede emplearse también la sensibilidad práctica por microampere $S_{\mu A^{-1}} = \frac{10^{-6}}{S_A}$.

Para observar el movimiento de la cuerda hay que prever aberturas en las piezas polares; el campo real no es uniforme. Pero las conclusiones del estudio teórico, en el que el campo se supone uniforme, son en general prácticamente válidas (ver el parágrafo 5).

2. Pulsaciones ideales de la cuerda. — La ecuación del movimiento propio de la cuerda considerada en el parágrafo precedente, vibrando transversalmente en el plano xy, es, en ausencia de amortiguamiento

$$m \frac{\delta^2 x}{\delta t^2} = \mathfrak{T} \frac{\delta^2 x}{\delta y^2} \tag{9}$$

donde m es la masa de la unidad de longitud del hilo; se supone que m y $\mathfrak{T}$ son constantes. Las pulsaciones y los períodos ideales son

$$w_{on} = \frac{2\pi}{T_{on}} = \frac{n\pi}{Y} \sqrt{\frac{\mathfrak{T}}{m}} \tag{10}$$

donde n es un entero. El período T_{o1} ($n = 1$) es el fundamental; los otros son armónicos.

En un punto de ordenada y, la desviación x de la cuerda oscilando libremente es

$$x = \sum_{1}^{\infty} P_n \, sen \, (w_{on} t + \varphi_n) \, sen \, \frac{n \pi y}{Y} \qquad (11)$$

Las constantes P_n y φ_n están determinadas por las condiciones iniciales.

En realidad el amortiguamiento no es nulo y estudiaremos más a fondo el movimiento propio teniéndolo en cuenta Pero antes vamos a ver, siempre dentro de la hipótesis de la ausencia de amortiguamiento, el interesante caso de la cuerda inmóvil en los extremos, con una masa M en su centro. Ya hemos observado (VII 24) que éste es el caso del galvanómetro de resonancia de *Duddell*, con la diferencia de que en este último hay dos cuerdas vibrantes paralelas, cuyos movimientos, en oposición, imprimen una rotación a un espejo fijo en el centro. El mismo estudio puede también servir de introducción al del galvanómetro de resonancia de *Moll*, que examinaremos más adelante, en el parágrafo 9.

Las pulsaciones propias ideales w_{on} están dadas por las raíces de la ecuación (1)

$$tg \, w_{on} \frac{Y}{2} \sqrt{\frac{m}{\mathfrak{T}}} = \frac{m Y}{4 M} \frac{1}{w_{on} \frac{Y}{2} \sqrt{\frac{m}{\mathfrak{T}}}} \qquad (12)$$

La ecuación (12) debe ser resuelta gráficamente, pero si la masa total del hilo, $m \, Y$, es pequeña frente a la masa M del espejo, la hipérbola $\frac{mY}{4M} \frac{1}{w_{on} \frac{Y}{2} \sqrt{\frac{m}{\mathfrak{T}}}} \left(w_{on} \frac{Y}{2} \sqrt{\frac{m}{\mathfrak{T}}} \right)$ se aproxima a los ejes y el primer punto en que corta a $tg \, w_{on} \frac{Y}{2} \sqrt{\frac{m}{\mathfrak{T}}} \left(w_{on} \frac{Y}{2} \sqrt{\frac{m}{\mathfrak{T}}} \right)$

(1) El lector comparará útilmente el movimiento propio de la cuerda con las oscilaciones eléctricas de las líneas con constantes repartidas, encontrando fácilmente las ecuaciones eléctricas análogas a las (9)-(15), (21) y (26). Así por ejemplo la relación (12) se comparará con las $tg \, w_{on} \sqrt{C \, L} = \frac{L}{L'} \frac{1}{w_{on} \sqrt{C \, L}}$ y $tg \, w_{on} \sqrt{C \, L} = \frac{C}{C'} \frac{1}{w_{on} \sqrt{C \, L}}$ que dan las pulsaciones ideales de una línea larga de capacidad total C y de coeficiente de self-inducción total L, respectivamente aislada en un extremo y cerrada sobre una self concentrada L' en el otro, o en cortocircuito en un extremo y cerrada sobre una capacidad concentrada C' en el otro. Se consultará p. ej. J. Fallou: "Les réseaux de transmission d'énergie".

cae en la región donde se puede confundir la tangente con el arco, de manera que se deduce, a partir de la relación (12)

$$w_{o1} = \frac{2\pi}{T_{o1}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{T}}{M\,Y}} \tag{13}$$

Los otros puntos de intersección de las dos curvas están bastante cerca del eje de abscisas, es decir, de los puntos de abscisas π, 2π, ... $n\pi$, siendo pues

$$w_{o(n+1)} = \frac{2\pi}{T_{o(n+1)}} \cong \frac{2\,n\pi}{Y}\sqrt{\frac{\mathfrak{T}}{m}} \tag{14}$$

Este resultado podría entreverse a priori: una masa M suficientemente importante reduce la desviación en el centro, y en el límite cada mitad del hilo se encuentra en las condiciones del hilo entero precedente, a saber, inmovilizado en los extremos. Pero además está la vibración a baja frecuencia correspondiente a la masa concentrada M y a la fuerza directriz $\frac{\mathfrak{T}}{Y}$ por desviación unidad.

3. Amortiguamiento. Régimen transitorio en corriente continua.— Supongamos que el término debido al amortiguamiento sea de la forma $A_o \frac{dx}{dt}$, con $A_o = Cte$; la ecuación de movimiento se escribe:

$$m\,\frac{\delta^2 x}{\delta\,t^2} + A_o\,\frac{\delta x}{\delta\,t} = \mathfrak{T}\,\frac{\delta^2 x}{\delta\,y^2} \tag{15}$$

Para encontrar los pseudo períodos del movimiento y su grado de amortiguamiento, recordemos que la solución es de la forma

$$\mathrm{x} = x_m\,e^{\mathrm{h}\,t} \tag{16}$$

con

$$\mathrm{h} = -\,b + j\,b'' \tag{17}$$

pudiendo b'' ser real o imaginario. Resulta pues

$$\frac{d^2\mathrm{x}}{d\,y^2} = \left(\frac{m}{\mathfrak{T}}\,\mathrm{h}^2 + \frac{A_o}{\mathfrak{T}}\,\mathrm{h}\right)\mathrm{x} = \mathrm{k}^2\,\mathrm{x} \tag{18}$$

Hagamos

$$\mathrm{k} = k_1 + j\,k_2 \tag{19}$$

de manera que, identificando en (18)

$$\left.\begin{aligned} k_1{}^2 - k_2{}^2 &= \frac{m}{\mathfrak{T}}\,(b^2 - b''^2) - \frac{A_o}{\mathfrak{T}}\,b \\ 2\,k_1\,k_2 &= (A_o - 2\,m\,b)\,\frac{b''}{\mathfrak{T}} \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

La solución de (18) es

$$x = Q_1\,e^{ky} + Q_2\,e^{-ky} \qquad (21)$$

y, estando la cuerda inmovilizada en los dos extremos, se debe cumplir

$$\left\{\begin{aligned} o &= Q_1 + Q_2 \\ o &= Q_1\,e^{kY} + Q_2\,e^{-kY} \end{aligned}\right.$$

o sea

$$Sh\,k\,Y = o \qquad (22)$$

lo que implica

$$k_1 = o\,; \quad k_2\,Y = n\,\pi \qquad (23)$$

donde n es un entero. Las ecuaciones (20) dan inmediatamente

$$b = \frac{A_o}{2\,m} = \alpha_{o1}\,w_{o1} = \alpha_{on}\,w_{on} \qquad (24)$$

$$b''_n{}^2 = \frac{n^2\pi^2}{Y^2\frac{m}{\mathfrak{T}}} - b^2 = n^2 w_{o1}{}^2\left[1 - \left(\frac{\alpha_{o1}}{n}\right)^2\right] = w_{on}{}^2\,(1 - \alpha_{on}{}^2) \qquad (25)$$

Cuando $b = o$, se vuelve a encontrar la oscilación no amortiguada indicada en el parágrafo precedente. Obsérvese que $\alpha_{on} = \frac{\alpha_{o1}}{n}$.

Basta considerar $\alpha_{o1} < 1$; el régimen propio de cada oscilación es sinusoidal amortiguado. Se tiene

$$x = e^{-bt}\sum_1^\infty P_n\,sen\,(b''_n\,t + \varphi_n)\,sen\,\frac{n\pi y}{Y} =$$

$$= e^{-\alpha_{on}\,n\,\tau}\sum_1^\infty P_n\,sen(n\tau\sqrt{1 - \alpha_{on}{}^2} + \varphi_n)\,sen\,\frac{n\pi y}{Y} \qquad (26)$$

haciendo

$$\tau = w_{o1}\,t \qquad (27)$$

Consideremos el importante caso de la supresión brusca de una corriente constante en el circuito de la cuerda. El móvil parte del reposo en equilibrio forzado: $t = 0,\ x = x_f,\ \frac{\delta x}{\delta t} = 0$. El nuevo régimen forzado es

$$x = 0 \qquad \frac{\delta x}{\delta t} = 0$$

Las condiciones iniciales del régimen libre para un elemento $M M'$ cualquiera, de ordenada y, están definidas por

$$0 + (x)_{t=0} = x_f$$

$$0 + \left(\frac{\delta x}{\delta t}\right)_{t=0} = 0$$

o sea

$$(x)_{t=0} = x_f \qquad \left(\frac{\delta x}{\delta t}\right)_{t=0} = 0 \tag{27}$$

La relación (26) da por consiguiente, en el instante inicial

$$x_f = \sum_1^{\infty} P_n \, sen \, \varphi_n \, sen \, \frac{n \pi y}{Y} \tag{28}$$

y a partir de su derivada respecto al tiempo, siempre en el instante inicial

$$\sum_1^{\infty} b^{\text{II}n} P_n \cos \varphi_n \, sen \, \frac{n \pi y}{Y} = b \sum_1^{\infty} P_n \, sen \, \varphi_n \, sen \, \frac{n \pi y}{Y} \tag{29}$$

Para determinar $P_n \, sen \, \varphi_n$ multipliquemos los dos miembros de la ecuación (28) por $sen \, \frac{n \pi y}{Y} dy$ e integremos entre 0 e Y.

Resulta

$$\int_0^Y x_f \, sen \, \frac{n \pi y}{Y} dy = P_n \, sen \, \varphi_n \int_0^Y sen^2 \, \frac{n \pi y}{Y} dy$$

$$+ \sum_{m=1}^{m=\infty} \int_0^Y P_m \, sen \, \varphi_m \, sen \, \frac{m \pi y}{Y} \, sen \, \frac{n \pi y}{Y} dy$$

donde m es un entero diferente de n. Se deduce evidentemente

$$P_n \, sen \, \varphi_n = \frac{2}{Y} \int_0^Y x_f \, sen \, \frac{n \pi y}{Y} dy \tag{30}$$

donde x_f es función de y y está dada por la relación (7). Reemplazando en (30) x_f por su valor e integrando, resulta

$$P_n \, sen \, \varphi_n = \frac{16}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n] \, x_{cf} \tag{31}$$

De (29), multiplicando los dos miembros por $sen \frac{n \pi y}{Y} dy$ e integrando entre 0 e Y

$$P_n \cos \varphi_n = \frac{b}{b''_n} P_n \, sen \, \varphi_n \tag{32}$$

o sea, finalmente

$$P_n = \frac{16}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n] \sqrt{1 + \frac{b^2}{b''^2_n}} \, x_{cf} =$$

$$= \frac{16}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n] \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha_{on}^2}} \, x_{cf} \tag{33}$$

$$tg \, \varphi_n = \frac{b''_n}{b} = \frac{\sqrt{1 - \alpha_{on}^2}}{\alpha_{on}} \tag{34}$$

Se deducen dos conclusiones importantes

1) las armónicas pares desaparecen: para $n = 2h$, h entero, $P_{2h} = 0$, resultado evidente a priori en razón de la simetría de la figura de equilibrio de la cuerda desviada con respecto al eje OO' (fig. 1)

2) las amplitudes de las armónicas impares decrecen en razón inversa al cubo de su orden, siendo la de la armónica 3 sólo 3,7 °/o de la amplitud de la fundamental. Se deduce que prácticamente se puede hacer abstracción de los términos armónicos, reduciendo así el estudio del aparato con un número teóricamente infinito de pseudo-períodos propios al del galvanómetro de pseudo-período propio único, es decir, colocándonos en el caso estudiado en el primer capítulo. La ecuación del movimiento propio, considerando el elemento central del hilo, que es el que se observa, se obtiene haciendo en (26) $\frac{y}{Y} = \frac{1}{2}$, y es

$$x_c = \frac{32}{\pi^3} x_{cf} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha_{o1}^2}} e^{-\alpha_{o1} \tau} sen \left(\sqrt{1 - \alpha_{o1}^2} \, \tau + \varphi_1 \right) - \right.$$

$$- \frac{1}{27\sqrt{1 - \alpha_{o3}^2}} e^{-\alpha_{o3} 3 \tau} \, sen \left(\sqrt{1 - \alpha_{o3}^2} \, 3 \tau + \varphi_3 \right)$$

$$\left. + \frac{1}{125\sqrt{1 - \alpha_{o5}^2}} e^{-\alpha_{o5} 5 \tau} \, sen \left(\sqrt{1 - \alpha_{o5}^2} \, 5 \tau + \varphi_5 \right) \ldots \right] \qquad (35)$$

o sea, con cierta aproximación

$$\frac{x_c}{x_{cf}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha_{o1}^2}} e^{-\alpha_{o1} \tau} \, sen \left(\sqrt{1 - \alpha_{o1}^2} \, \tau + \varphi_1 \right) \qquad (36)$$

relación idéntica a la (113) del capítulo I.

Podemos pues aplicar también aquí los resultados del estudio hecho en el capítulo I: en particular, si el amortiguamiento es conveniente y el período ideal es suficientemente pequeño, el aparato puede servir para registrar las variaciones bruscas de una corriente que no se sucedan demasiado rápidamente, sirviendo así de oscilógrafo. Los errores de registro debidos al aparato en sí se estudiarán en detalle en el capítulo XI, pero observemos aquí que el galvanómetro de cuerda presta grandes servicios en los estudios fisiológicos, donde toma el nombre de electrocardiógrafo. Para estudiar fenómenos de período bastante mayor que T_{o1}, tales como los latidos del corazón, la gran sensibilidad del galvanómetro de cuerda comparada con la de otros oscilógrafos, es una gran ventaja.

Provisto de dispositivos especiales, el aparato puede también servir de oscilógrafo aún para frecuencias tan elevadas como 10^4 Hz (ver el capítulo XI).

El amortiguamiento se debe a los frotamientos del aire, y en circuito cerrado, a las fuerzas electromagnéticas; en realidad existe también algún amortiguamiento por histéresis elástica. Vamos a examinar el término debido a las fuerzas electromagnéticas. Consideremos, para simplificar, la cuerda vibrando alrededor de su posición de equilibrio al suprimir la corriente constante producida por una fuente exterior. Supondremos cerrado el circuito de la cuerda; sea R su resistencia total. Volvamos al elemento MM' de la fig. 1. La f.e.m. inducida en él es

$$e = - B \, dl \frac{dx}{dt} = - 4 B \frac{dx_c}{dt} \left(\frac{y}{Y} - \frac{y^2}{Y^2} \right) dy \qquad (37)$$

teniendo en cuenta (7) y confundiendo dy con dl.

La integración da

$$E = -4B\frac{dx_c}{dt}\int_0^Y\left(\frac{y}{Y}-\frac{y^2}{Y^2}\right)dy = -\frac{2}{3}BY\frac{dx_c}{dt} \qquad (38)$$

Despreciando los efectos de la self-inducción, la corriente inducida es $i = \frac{E}{R}$ y la fuerza unitaria de amortiguamiento es

$$f_a = \frac{2}{3}\frac{B^2Y}{R}\frac{dx_c}{dt} \qquad (39)$$

El amortiguamiento debido al aire es frecuentemente bastante enérgico; si la cuerda está poco tensa se obtiene fácilmente un amortiguamiento de la oscilación fundamental próximo y aún superior al crítico. En ciertos aparatos el amortiguamiento electromagnético es notable y puede regularse con ayuda de un shunt.

4. Estudio de la sensibilidad en intensidad del galvanómetro de cuerda. — La expresión (8a) de la sensibilidad práctica en ampere puede escribirse, teniendo en cuenta (10)

$$S_A = \frac{32m}{BG}\frac{1}{T_{ol}^2} \qquad (40)$$

Se ve que a igualdad de período ideal y de dispositivo de lectura hay interés, para disminuir S_A, en aumentar B y reducir m. Será pues preferible elegir hilos de densidad pequeña y lo más finos que permita la resistencia mecánica. Desde este punto de vista los hilos de cuarzo son particularmente interesantes; pero no siendo el cuarzo conductor, hay que depositar sobre la superficie de la fibra una capa metálica, p. ej. de oro. Tienen el inconveniente de poseer una resistencia propia elevada; R_g es función del espesor del depósito y de la naturaleza del metal depositado y está comprendida entre 1000 y 10000 Ω aproximadamente.

Los hilos de cuarzo se estiran hasta obtener alrededor de $2\,\mu$m de diámetro.

Entre los hilos metálicos, mucho más conductores que los anteriores, es ventajoso el aluminio a causa de su pequeña densidad y de que puede estirarse hasta $2\,\mu$m de diámetro, pero desgraciadamente sólo puede soportar tensiones mecánicas muy pequeñas,

porque presenta el fenómeno de escurrimiento bajo carga constante. Se emplean mucho el platino, el oro y el cobre; el platino tiene el inconveniente de poseer una susceptibilidad magnética elevada, lo que obliga a un centrado muy exacto para que las fuerzas magnéticas no desvíen la fibra normalmente al plano de la fig. 1 provocando el desenfoque. Estas fuerzas de atracción magnética exigen que la fibra esté exenta de impurezas ferromagnéticas y que se la proteja, así como a las caras del entrehierro, contra todo depósito de polvo.

La resistencia de los hilos metálicos está generalmente comprendida entre 10 y 150 Ω.

El aumento de la inducción B (se pasa de 20000 gauss) tiene el inconveniente de aumentar la potencia de excitación. En particular hay que cuidarse del calentamiento, porque a causa de la diferencia entre las dilataciones de la cuerda y de su soporte, la tensión de la fibra, y por consiguiente la sensibilidad del aparato, pueden variar en forma notable durante la medida. Además, con la inducción aumenta la atracción de las piezas polares, que puede alcanzar valores muy considerables, provocando así cierta dificultad de construcción, ya que el aparato prácticamente no se debe deformar cuando se excita el electroimán. Es claro que a igualdad de inducción hay interés en reducir lo más posible el entrehierro, disminuyendo así la fuerza magnetomotriz necesaria y con ella la potencia de excitación. Pero con el entrehierro estrecho es más difícil obtener un campo uniforme en el espacio en que se desplaza la fibra en su movimiento y por consiguiente la independencia de la sensibilidad en intensidad del valor de la corriente. El espesor del entrehierro está generalmente comprendido entre 0,5 y 2 mm.

En los aparatos más sensibles, la sensibilidad práctica en intensidad alcanza valores tan elevados como 10^{-11} A con un aumento del orden de 1000. pero en general los galvanómetros de cuerda son menos sensibles que los de cuadro móvil.

En la elección de un aparato hay que tener en cuenta, además de la sensibilidad práctica en intensidad, el período ideal, el amortiguamiento y la resistencia de la cuerda. Para "facilitar" la elección se introduce a veces la noción de la "sensibilidad normal" o del "factor de mérito" (ver el capítulo IV, 11) también para los galvanómetros de cuerda. Así, en un catálogo se indican los

valores aproximados del "factor de mérito" del galvanómetro de cuerda, calculados grosso-modo por la relación

$$S_n = S_{\mu A}{}^{-1} \left(\frac{10}{T_o} \right)^2 R_g{}^{-2/5} \qquad (41)$$

que ha sido establecida (fórmula (43) del capítulo IV, 11) para los galvanómetros de imán móvil. Ya observamos oportunamente (IV, 11) que dicha noción sólo podía presentar interés, y aún restringido, en la época en que el galvanómetro de imán era el único empleado, pero creemos deber subrayar todavía que en nuestra opinión el cálculo del "factor de mérito" del galvanómetro de cuerda por la fórmula del galvanómetro de imán no tiene sentido. En efecto, la relación (40) se puede escribir

$$S_{\mu A}{}^{-1} = \frac{BG}{32} \frac{1}{\varrho \delta l} T_{ol}{}^2 R_g \, 10^{-6} \qquad (42)$$

eliminando m e introduciendo $R_g = \varrho \frac{l}{s} = \varrho \frac{\delta l}{m}$. La fórmula (42) demuestra que para fibras *del mismo metal y de la misma longitud*, la sensibilidad aumenta como R_g y no como $R_g{}^{2/5}$; para las fibras de cuarzo no parece posible introducir una relación entre la masa total y la resistencia del depósito. Cuando se cambian las bobinas en los galvanómetros de imán, éstas son siempre de cobre y de las mismas dimensiones y la relación (41) tiene cierto campo de aplicación, mientras que si se quiere a todo precio introducir un factor de mérito para el galvanómetro de cuerda, hay que limitarse a las cuerdas metálicas del mismo metal y de la misma longitud, y escribir en (41) $R_g{}^{-1}$ en lugar de $R_g{}^{-2/5}$. Se ve que tal noción no tiene interés.

Se puede también aumentar S_i, pero aumentando al mismo tiempo el período, dando mayor longitud a la cuerda. En el primer aparato de este tipo, debido a *Ader*, donde el campo era pequeño, la cuerda tenía 1 m de longitud; en los aparatos modernos la longitud está comprendida aproximadamente entre 6 y 15 cm.

La sensibilidad y el período pueden regularse entre ciertos límites, obrando sobre la tensión del hilo; es ésta una de las ventajas del aparato.

Hay que observar que cuando la tensión del hilo se hace pequeña, o sea cuando se exige al aparato su mayor sensibilidad, no

son despreciables ni la acción de la gravedad ni la rigidez. La teoría que precede no se aplica más y se puede constatar que la desviación del galvanómetro cesa de ser proporcional a la corriente, al menos en cierta zona. Con pequeñas tensi nes se pueden también observar irregularidades en el enfoque de la fibra, debidas generalmente a tensiones internas.

5. Galvanómetro de Einthoven y similares. — El galvanómetro de cuerda, debido a *Ader*, ha sido perfeccionado por *Einthoven*, que le dió (a menos de perfeccionamientos de detalle) su forma actual (fig. 2).

La fibra *a b* puede estar encerrada en una cajita estanca, provista de ventanas de vidrio o de mica para permitir la observación. La regulación de la tensión se hace por medio de tornillos, impidiendo un tope que la tensión exceda de cierto valor; otros tornillos permiten centrar la fibra. El empleo de la cajita hace más fácil el cambio de la fibra y asegura su protección, pero estas ventajas no deben hacerse a costa del dispositivo de centrado, que se suprime a veces por falta de espacio. Los aparatos sin cajita deben estar cubiertos para proteger la fibra, en particular contra el depósito de polvo

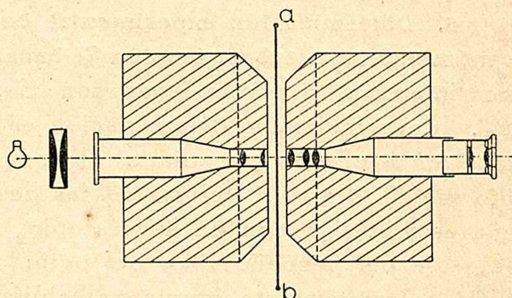


Fig. 2

En los modelos más sensibles el campo se debe a un electroimán que trabaja en la zona de saturación para que una pequeña variación de la corriente de excitación no modifique prácticamente la inducción en el entrehierro. En los modelos menos sensibles se emplea un poderoso imán permanente; así el aparato se puede transportar más fácilmente.

En los núcleos polares se practican canales cilíndricos coaxiales, cuyo eje corta la cuerda en su punto medio, que sirven para la observación o el registro del movimiento de aquella, y que contienen condensores y el microscopio. El ajuste de este último debe ser particularmente cuidadoso, para reducir, en el caso de estar el aparato sometido a vibraciones, el atraso en su movimien-

to sobre el de la fibra. El dispositivo óptico varía según que la observación se haga directamente, o proyectando la cuerda sobre una pantalla, o inscribiendo el movimiento del punto medio de la cuerda (ver el capítulo XI).

Debido a la presencia de los canales, el campo deja de ser uniforme a lo largo de la fibra, como supusimos en el estudio teórico anterior. Pero la perturbación es limitada: con un canal cuya abertura en el entrehierro es $1/u$ de la altura de los polos, la disminución de la sensibilidad es sólo $1/u^2$ respecto a lo que se tendría con polos macizos (*Williams*); así para el valor corriente de $u = 6$, dicha disminución es de $\sim 3\ ^0/_0$.

Se construyen también modelos con dos fibras paralelas, de regulación independiente, que permiten el registro de dos fenómenos simultáneos.

6. Determinación experimental de las características del galvanómetro de cuerda a tensión $\mathcal{T}$ dada. — Las características que nos interesan en primer lugar son S_A, T_{0l}, α_{0l} y eventualmente R_c. En principio la determinación es análoga a la que estudiamos en detalle en el capítulo VI para los galvanómetros de cuadro móvil. Pero la lectura de las desviaciones no se hace sobre una escala, sino con un microscopio, y la precisión es menor. A causa del pequeño valor del período ideal fundamental, el estudio del movimiento propio nos obliga a efectuar un registro. Estas no son las únicas diferencias: hay que estudiar también la acción de las armónicas del movimiento, que pueden ocasionar errores suplementarios y disminuyen la precisión de las medidas.

1) *Determinación de T_{0l} y de α_{0l}.* El movimiento propio registrado es poliarmónico amortiguado, y la medida directa del tiempo transcurrido entre dos elongaciones sucesivas y de su relación sólo dará $T_{0l}/2$ y $k_l = e^{\lambda_l}$ si en los instantes en que se producen esas elongaciones ya se han extingido prácticamente las armónicas. Vamos a considerar el problema más a fondo (ver también I, 10).

Sea $\frac{x_c}{x_{cf}} = \frac{1}{s}$ la menor fracción de la desviación inicial total x_{cf}, que se puede observar sobre el registro. La amplitud inicial de la armónica de orden n es $\frac{x_{cf}}{f(n)}$, y el número p_n de elongaciones observables de esta armónica está dado por

$$\frac{x_{cf}}{f(n)} k_n^{-p_n} = \frac{x_{cf}}{s}$$

donde k_n es la relación entre dos elongaciones sucesivas de la oscilación armónica considerada; recordemos que

$$log_e k_n = \lambda_n = \frac{\pi \alpha_{on}}{\sqrt{1 - \alpha_{on}^2}}$$

Se deduce

$$p_n = \frac{log_e \frac{s}{f(n)}}{log_e k_n} = \frac{\sqrt{1 - \alpha_{on}^2}}{\pi \alpha_{on}} log_e \frac{s}{f(n)} \qquad (43)$$

La oscilación armónica de orden n se puede pues observar durante

$$\tau' = w_{ol} \frac{p_n T_n}{2} = w_{ol} \frac{p_n \pi}{b''_n} = \frac{p_n \pi}{n \sqrt{1 - \alpha_{on}^2}} \qquad (44)$$

Considerando las elongaciones posteriores a τ' no hay que tener en cuenta la armónica de orden n; a este efecto basta dejar transcurrir un número de elongaciones igual a

$$q = \frac{\tau'}{w_{ol} T_l / 2} = \frac{p_n}{n} \sqrt{\frac{1 - \alpha_{ol}^2}{1 - \alpha_{on}^2}} = p_n \sqrt{\frac{1 - \alpha_{ol}^2}{n^2 - \alpha_{ol}^2}} \qquad (45)$$

Admitiendo que la figura de equilibrio de la cuerda recorrida por una corriente constante es un arco de circunferencia, $f(n) = \frac{1,033}{n^3}$ y la única oscilación armónica que hay que considerar prácticamente es la correspondiente a $n = 3$. Si hacemos además $s = 100$, se deduce de (43)

$$p_3 = 0,43 \frac{\sqrt{9 - \alpha_{ol}^2}}{\alpha_{ol}} \qquad (46)$$

Así, para $\alpha_{ol} \cong 0,1$, $p_3 \cong 13$, $\tau' \cong 13,5$, $q \cong 5$; midiendo las oscilaciones registradas a partir de la quinta nos independizamos de la influencia de la armónica 3. Pero la amplitud de la primera elongación medida — que es la quinta — no es más que 0,22 de la amplitud total inicial, y por consiguiente la precisión de la medida es pequeña.

Cualquiera que sea la forma de la figura de equilibrio del hilo, será posible darse cuenta del instante en que las armónicas de-

jan de influir, comparando entre sí los valores de k obtenidos a partir de las diferentes elongaciones sucesivas.

Williams observa que shuntando el aparato de modo que $\alpha_1 = 1$, se puede deducir fácilmente T_{o1} a causa de la forma simplificada $\frac{x_c}{x_{cf}} = (1 + \tau)\, e^{-\tau}$ que toma en este caso la ecuación de la oscilación fundamental del movimiento. La precisión de tal medida está afectada no solamente por la armónica 3, sino también por el hecho de que es imposible apreciar con certeza cuando $\alpha_1 = 1$; si la precisión de la lectura está caracterizada por $s = 100$, ya para $\alpha_1 = 0,83$ la segunda elongación no se puede apreciar y el movimiento "parece" aperiódico (ver **I, 10**).

2) *Determinación de la sensibilidad en intensidad.* Esta determinación no requiere ningún comentario especial. Es preciso estudiar la variación de la sensibilidad con la corriente de excitación.

3) *Determinación de la resistencio crítica* (*o sea de la resistencia del circuito para la cual* $\alpha_1 = 1$). En principio se determina por el método directo o el semi-directo, como en los galvanómetros de cuadro móvil. En el método semi-directo se tendrá en cuenta la influencia de las oscilaciones armónicas, que se acaba de discutir.

4) *Determinación de* m, B *y* A_o. Hay que observar que en movimiento m ya no es la masa por unidad de longitud del hilo, sino una masa mayor, porque el aire de alrededor participa en el movimiento. El aumento es bastante considerable dado el pequeño diámetro de la fibra; además depende de la velocidad del movimiento.

El coeficiente A_o depende igualmente de la velocidad del movimiento, pero según *Williams* $b = \frac{A_o}{2m}$ es sensiblemente constante.

B representa el valor de la inducción del campo uniforme equivalente que sirvió para establecer la teoría, y puede diferir algo de los valores medios en las diversas regiones del entrehierro. Para determinar B se puede colocar en el aparato una fibra metálica de masa m conocida y la relación (40) da B previa medida de S_A y T_{o1}. La fibra en cuestión debe ser tan perfectamente flexible como sea posible y debe ser capaz de soportar tensiones elevadas para colocarse en las condiciones admitidas en el establecimiento de (40). Luego la misma relación sirve para determinar m de la fibra de trabajo.

La relación (24) permite determinar A_0, conocidos α_{0l}, T_{0l} y m.

7. **Galvanómetro Moll - Van Dyck.** — Este aparato permite efectuar la observación por medio de un rayo luminoso reflejado por un espejo, mucho más cómodamente que con un microscopio.

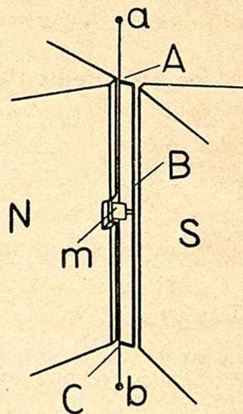


Fig. 3

Sobre la cuerda ab (fig. 3) está soldada una semi - espira ABC de resistencia mucho menor que la de la parte AC de la fibra. Por lo tanto la mayor parte de la corriente a medir atraviesa la semi-espira ABC, que desvía mucho más que la cuerda, lo que ocasiona la rotación del espejo m fijo sobre el bucle. Si despreciamos la desviación de la cuerda ab y la influencia del espejo, el ángulo de rotación Θ está dado por $\Theta = arc\ sen \frac{x_c}{d}$, donde $x_c = \frac{BY^2}{8\mathfrak{T}} I$ y d es la distancia entre las dos cuerdas paralelas. Cuando las desviaciones son suficientemente pequeñas se tiene $S_i = \frac{\Theta}{I} = \frac{BY^2}{8\mathfrak{T}d}$. Como desde el punto de vista del amortiguamiento electromagnético la cuerda se encuentra en corto-circuito, aquel es enérgico, y depende poco de la resistencia del circuito exterior; puede regularse a su valor crítico obrando sobre el campo, que es producido sea por un imán permanente provisto de un shunt magnético, sea por un electroimán. El modelo con electroimán tiene cuerdas intercambiables, siendo el período ideal 0,01 o 0,02s. La resistencia interior es pequeña, del orden de 5 - 10 Ω, y la sensibilidad en intensidad es del orden de 5.10^{-7} m.A/mm.

8. **Aparato de cuerda como galvanómetro de resonancia** — La ecuación de movimiento de un elemento de la cuerda recorrida por una corriente $i = I_m\ sen\ pwt$ (p entero), donde I_m y pw son constantes, es

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + A_0\frac{\partial x}{\partial t} - \mathfrak{T}\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = BI_m\ sen\ pwt = \frac{4\,BI_m}{\pi}\ sen\ pwt \sum_1^\infty \frac{1}{n}\ sen\frac{n\pi y}{Y} \quad (47)$$

en virtud de ser $\frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\ sen\frac{n\pi y}{Y} = 1$; n es un entero *impar.*

La solución particular de (47), que representa el régimen forzado, es

$$x = \sum_{1}^{\infty} x_{mcn} \, sen\,(pwt - \varphi_n)\, sen \frac{n\pi y}{Y} \qquad (48)$$

o sea, en notación compleja

$$x = \sum_{1}^{\infty} x_{mcn} \, e^{\,j(pwt - \varphi_n) + j\frac{n\pi y}{Y}} \qquad (48a)$$

Resulta, reemplazando en (47)

$$-mp^2w^2 \sum_{1}^{\infty} x_{mcn}\, e^{-j\varphi_n + j\frac{n\pi y}{Y}} + jA_o\, pw \sum_{1}^{\infty} x_{mcn}\, e^{-j\varphi_n + j\frac{n\pi y}{Y}} +$$

$$+ \mathfrak{T} \frac{\pi^2}{Y^2} \sum_{1}^{\infty} x_{mcn}\, n^2\, e^{-j\varphi_n + j\frac{n\pi y}{Y}} = B I_m = \frac{4 B I_m}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}\, e^{j\frac{n\pi y}{Y}} \qquad (49)$$

Consideremos separadamente cada oscilación armónica. Se tiene

$$x_{mcn}\, e^{-j\varphi_n} \left[\mathfrak{T} \frac{\pi^2}{Y^2} n^2 - m\, p^2 w^2 + j\, A_o\, p\, w \right] = \frac{4 B I_m}{\pi\, n} \qquad (50)$$

de donde, teniendo en cuenta (10) y (24) y haciendo

$$u_{np} = \frac{p\, w}{w_{on}} \qquad (51)$$

$$x_{mcn} = \frac{4\, B\, I_m}{\pi\, n \sqrt{\left(\mathfrak{T} \frac{\pi^2}{Y^2} n^2 - m\, p^2 w^2 \right)^2 + A_o{}^2 p^2 w^2}} =$$

$$= \frac{4 B Y^2 I_m}{\pi^3\, \mathfrak{T}} \; \frac{1}{n^3 \sqrt{(1 - u_{np}{}^2)^2 + 4\, \alpha_{on}{}^2 u_{np}{}^2}} \qquad (52)$$

y

$$\varphi_n = arctg \frac{A_o\, p\, w}{\mathfrak{T} \frac{\pi^2}{Y^2} n^2 - m\, p^2 w^2} = arctg \frac{2\, \alpha_{on}\, u_{np}}{1 - u_{np}{}^2} \qquad (53)$$

Por consiguiente la solución es

$$x = \frac{4 B Y^2 I_m}{\pi^3\, \mathfrak{T}} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{(1 - u_{np}{}^2)^2 + 4\, \alpha_{on}{}^2 u_{np}{}^2}} \times$$

$$\times sen\left(pwt - arctg\,\frac{2\,\alpha_{on}\,u_{np}}{1 - u_{np}^2}\right) sen\,\frac{n\pi y}{Y} \qquad (54)$$

y en el centro $\left(\frac{y}{Y} = \frac{1}{2}\right)$

$$x_c = \frac{4\,BY^2 I_m}{\pi^3\,\mathfrak{T}} \sum_1^\infty \frac{sen\,\frac{n\pi}{2}}{n^3}\,\frac{1}{\sqrt{(1 - u_{np}^2)^2 + 4\,\alpha_{on}^2 u_{np}^2}} \times$$

$$\times\, sen\left(pwt - arctg\,\frac{2\,\alpha_{on}\,u_{np}}{1 - u_{np}^2}\right) \qquad (55)$$

Se verifica inmediatamente que para pw tendiendo a cero, la amplitud de x_c tiende a $\frac{4\,B\,Y^2\,I_m}{\pi^3\,\mathfrak{T}} \sum_1^\infty \frac{1}{n^3}\,sen\,\frac{n\pi}{2} = \frac{B\,Y^2\,I_m}{8\,\mathfrak{T}}$: se vuelve a encontrar la relación (6) establecida directamente en el parágrafo 1.

La relación (55) permite discutir el comportamiento del aparato, funcionando a corriente de amplitud constante, de acuerdo con los criterios establecidos en el capítulo VII; se ve que para tener una sensibilidad elevada el amortiguamiento debe ser pequeño. Pero el problema es más complicado porque hay una serie de términos para cada armónica p de la corriente que recorre la cuerda.

La observación de la cuerda vibrante con un microscopio es incómoda y se han preferido dispositivos de espejo. El estudio se complica más; así en el aparato de dos cuerdas de *Duddell* descripto en el parágrafo 24 del capítulo precedente las pulsaciones ideales no están determinadas por (10) sino por una relación análoga a (12). Otro tipo de galvanómetro de resonancia de cuerda, con espejo y de una sola cuerda, es el de *Moll*.

9. Galvanómetro de resonancia de Moll. — *Moll* fijó sobre la fibra, asimétricamente, un pequeño espejo; debido a la asimetría el movimiento resultante es de traslación y de rotación, en lugar de ser sólo de traslación. Obrando sobre la tensión de la cuerda se puede regular el período ideal fundamental entre $\sim$ 100 y 2500 Hz, intervalo muy amplio teniendo en cuenta que no hay que cambiar el órgano móvil y que sin embargo se conserva una sensibilidad interesante. La resistencia de la fibra, de tungsteno, es de alrededor de 30 Ω; la sensibilidad a 100 Hz es del orden de 5.10^{-7} m.A/mm.

El campo se produce con un electroimán, de modo que se puede regular cómodamente la sensibilidad en tensión a su valor máximo.

10. Galvanómetros de bucle. — En el primer aparato de este tipo, debido a *Mechau* (fig. 4), una cinta de cobre, de $\sim 1 \mu$m por 0,5 mm de sección, se suspende normalmente a las líneas de fuerza entre los polos de dos imanes permanentes. Estos polos están dispuestos de manera que cuando una corriente i atraviesa el bucle, las fuerzas resultantes f sobre los dos lados verticales están dirigidas en el mismo sentido, y hacen desviar el bucle, en su plano, de la posición de equilibrio (fig. 5). La desviación se observa con un microscopio micrométrico con un aumento de $\sim$ 80-600, que enfoca el elemento vertical ab previsto a este efecto en el bucle; se puede también observar por proyección. La caja del galvanómetro

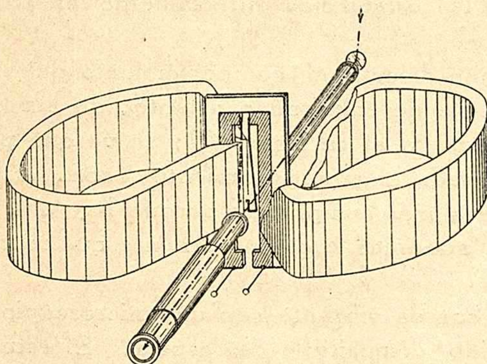


Fig. 4

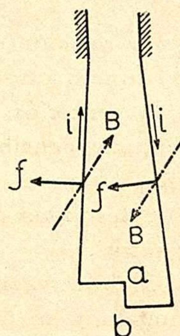


Fig. 5

puede girar alrededor de un eje horizontal; el bucle sufre una rotación de 180°, pasando así de la posición de equilibrio "suspendido" a la posición de equilibrio "apoyado"; la sensibilidad aumenta así unas 5 o 6 veces; en efecto, en la posición suspendida la fuerza directriz de la gravedad se suma a la elástica, mientras que en la posición apoyada se resta. La estabilidad del cero es muy inferior con el bucle apoyado.

Se proteje el bucle encerrándolo en una caja de vidrio de muy pequeño volumen, de manera que el amortiguamiento por los frotamientos del aire es enérgico, próximo al crítico. La caja con su bucle es fácil de cambiar.

La sensibilidad práctica en ampere es $S_A \cong 5.10^{-8}$ A (bucle suspendido) y $\sim 10^{-8}$ A (bucle apoyado), con un aumento de 640

en los dos casos. Como la resistencia interior es sólo de algunos ohm, la sensibilidad en tensión es elevada; esta propiedad, el pequeño período ideal (del orden de 0,6 s con el bucle apoyado, y de 0,25 s con el bucle suspendido) y el enérgico amortiguamiento hacen que el aparato sea particularmente interesante para ciertas aplicaciones, como por ejemplo, la medida de las fuerzas termoeléctricas, de las corrientes vagabundas, etc.

Se puede también emplear un bucle de hilo de sección circular y mayor. El aparato es menos sensible ($\sim 10^{-5}$ A) pero su período ideal es menor ($\sim$ 0,025 s).

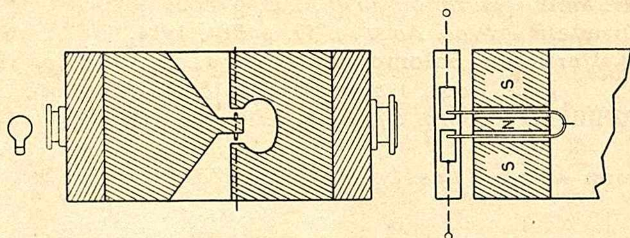


Fig. 6

Se debe a *Deubner* una forma un poco diferente del aparato; el bucle, de aluminio, está colocado en el entrehierro de un imán con polos de forma especial (fig. 6). Se suelda al bucle un índice de cuarzo para permitir la observación del movimiento con un microscopio. Las características del aparato son parecidas a las del galvanómetro de *Mechau*.

BIBLIOGRAFIA

1. **Ader** — *Ecl. él.*, t. 7-8, p. 295, 1897.
2. **A. C. Crehore** — *Phil. Mag.*, t. 28, p. 207, 1914.
3. **A. Deubner** — *Zs. f. techn. Phys.*, p. 163, 1930.
4. **M. Edelman** — *Phys. Zs.*, t. 7, p. 115, 1906.
5. **W. Einthoven** — *Ann. der Phys.*, t. 12, p. 1059, 1913; t. 16, p. 205, 1905 y t. 21, p. 483 y 665, 1906.
6. **R. Förster** — *El. Zs.*, t. 35, p. 146, 1914.
7. **S. Gerszonowicz** — *Rev. Electr.*, t. 29, p. 10, 1943.
8. **R. Mechau** — *Phys. Zs.*, t. 24, p. 242, 1923.
9. **W. J. H. Moll** — *Journ. Sc. Instr.*, t. 2, p. 362, 1925.
10. **L. S. Ornstein** — *Proc. Amst.*, t. 17, p. 784, 1914.
11. **J. K. A. Wertheim - Salomonson** — *Phys. Zs.*, t. 8, p. 195, 1907; *Proc. Amst.*, t. 21, p. 235, 1918 y t. 23, p. 613, 1921.
12. **H. B. Williams** — *Journ. Opt. Soc.*, t. 9, p. 129, 1924 y t. 13, p. 313, 1926.
13. **E. Wilson** — *Proc. Phys. Soc.*, t. 36, p. 433, 1924.

CAPITULO IX.

Electrodinamómetros, galvanómetros de inducción, de hierro y térmicos

Los aparatos examinados en el curso de los capítulos precedentes son los que se emplean generalmente en corriente continua o lentamente variable, o en corriente alterna de frecuencia industrial y acústica.

Pero existen otros aparatos que ocasionalmente sirven para revelar o medir pequeñas corrientes y que estudiaremos brevemente aquí. Repitamos que el interés de lo que sigue no se limita a los galvanómetros; en varios aspectos, este estudio sirve de base al de los aparatos industriales que funcionan según el mismo principio.

1. Electrodinamómetros, principio de funcionamiento. — En el capítulo I, 1, reprodujimos la definición del vocabulario electrotécnico del Comité Electrotécnico Francés, a saber:

electrodinamómetro — aparato que utiliza la acción electrodinámica de un circuito sobre otro, o de dos partes de un mismo circuito entre sí, con el fin de medir diversas magnitudes eléctricas, corriente, tensión, potencia.

Si se admite que la definición vale cuando hay hierro, se deduce que un galvanómetro de cuadro móvil con electroimán, o un galvanómetro de cuerda con electroimán, son electrodinamómetros.

Hay pues una vinculación entre ciertos aparatos ya estudiados y los que se estudiarán aquí.

Consideremos dos sistemas de cuadros de ejes horizontales, uno fijo y el otro móvil, susceptible de girar alrededor de un eje vertical (fig. 1); sea Θ_0 el ángulo que forma en reposo, en ausencia de corriente en los dos circuitos, el plano de las espiras del cuadro móvil con el eje XX' de los cuadros fijos.

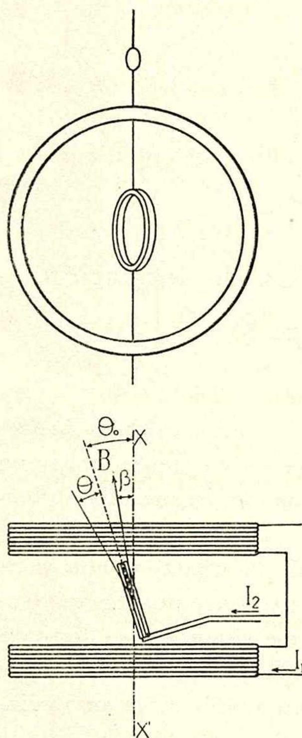


Fig. 1

Supongamos que el aparato está orientado en tal forma que el vector B, componente horizontal del vector inducción del campo terrestre, forma un ángulo β con el eje XX'. Por supuesto todo lo que sigue vale si B representa la misma componente del vector inducción debido al campo resultante de la composición del campo terrestre con un campo parásito uniforme.

Nos limitamos a los campos parásitos uniformes, pues si bien el par debido a los campos no uniformes se obtiene a partir de la misma ley general que el debido a los primeros, su cálculo en cada caso particular es muy difícil, si no imposible, porque es necesario saber cómo varía el flujo de inducción con la posición del cuadro.

I. *Funcionamiento en corriente continua.*

a) *Excitación separada.* Sean I_1 e I_2 las corrientes continuas enviadas respectivamente a las bobinas fija y móvil. El flujo exterior a través del cuadro móvil, cuando éste forma un ángulo Θ con su posición de equilibrio, es

$$\Phi = M\, I_1 + \Phi_p\, sen\, (\Theta + \Theta_0 - \beta) \qquad (1)$$

donde M es el coeficiente de inducción mutua de los dos circuitos y $\Phi_p = B\, S$, llamando S a la superficie total del cuadro móvil. Consideramos válida la relación (1) tanto con el cuadro móvil en reposo como en movimiento; en este último caso despre-

ciamos el flujo debido a la corriente I'_l inducida en el circuito fijo por el movimiento del cuadro móvil, lo que supone despreciable I'_l frente a I_l. No hacemos figurar en (1) los flujos parásitos alternos, cuyo efecto será examinado más adelante, en la parte II del mismo parágrafo.

La corriente I'_2 inducida en el cuadro móvil a causa de su movimiento, es

$$I'_2 = -\frac{1}{R_2}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R_2}\frac{d\Theta}{dt}\left[I_1\frac{dM}{d\Theta} + \Phi_p \cos(\Theta + \Theta_o - \beta)\right] \quad (2)$$

despreciando la self-inducción del circuito del cuadro; R_2 es la resistencia de ese circuito.

El par electromagnético que se ejerce sobre el cuadro es

$$C_m = (I_2 + I'_2)\frac{d\Phi}{d\Theta} = I_1 I_2 \frac{dM}{d\Theta} + \Phi_p I_2 \cos(\Theta + \Theta_o - \beta) -$$

$$-\frac{1}{R_2}\frac{d\Theta}{dt}\left[I_l\frac{dM}{d\Theta} + \Phi_p \cos(\Theta + \Theta_o - \beta)\right]^2 \quad (3)$$

La parte de C_m proporcional a $\frac{d\Theta}{dt}$ sólo influye sobre la ley de movimiento del sistema. En consecuencia, si el par director es de la forma $C_d = C\,\Theta$, la posición de equilibrio está definida por

$$C\,\Theta = I_l I_2 \frac{dM}{d\Theta} + \Phi_p I_2 \cos(\Theta + \Theta_o - \beta) \quad (4)$$

En lo que sigue, salvo indicación especial, suponemos que M es de la forma

$$M = M_o \, sen\,(\Theta + \Theta_o)$$

lo que equivale a admitir que el cuadro móvil se mueve en un campo uniforme; observemos que esta hipótesis no siempre se cumple, especialmente en los electrodinamómetros industriales. La relación (4) se escribe

$$C\Theta = [\Phi_l \cos(\Theta + \Theta_o) + \Phi_p \cos(\Theta + \Theta_o - \beta)]\, I_2 \quad (4a)$$

con $\Phi_l = M_o I_l$. Se puede comparar esta última expresión con la relación (1) del capítulo III, con la que se identifica si se desprecia Φ_p frente a Φ_l; esta hipótesis, siempre válida en los galvanómetros de cuadro móvil, sólo vale aquí si las bobinas fijas tienen núcleo de hierro.

En general se trata de hacer Θ_o nulo; en realidad sólo se consigue hacerlo muy pequeño; si además las desviaciones Θ son pequeñas, la relación (4a) se escribe

$$(C - \Phi_p I_2 \, sen\, \beta)\, \Theta = [\Phi_l + \Phi_p\, (cos\, \beta + \Theta_o\, sen\, \beta)]\, I_2 \qquad (4b)$$

La sensibilidad en intensidad del aparato, $S_i = \frac{\Theta}{I_2}$, está afectada por los campos parásitos, en particular por el campo terrestre, y, salvo si $\beta = 0$ o $\beta = \pi$, depende de I_2. Para independizarse de la influencia del campo terrestre, se puede

1) recurrir a un circuito fijo con hierro, lo que hace despreciable Φ_p frente a Φ_l y $\Phi_p\, I_2$ frente a C. Se tiene entonces

$$S_i = \frac{\Phi_l}{C}$$

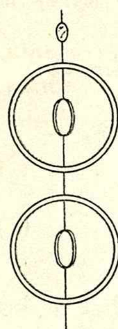


Fig. 2

Esta expresión de la sensibilidad vale para cualquier Θ y Θ_o cuando $M = M_o\, (\Theta + \Theta_o)$, es decir, cuando el campo es radial de intensidad constante.

2) recurrir a un sistema móvil astático, formado por dos cuadros idénticos, de ejes paralelos y contenidos en el mismo plano vertical (fig. 2); sobre cada cuadro actúa un sistema fijo idéntico; la disposición es análoga a la del galvanómetro de imán de *Lord Kelvin* (ver el capítulo II, 8). Tanto los cuadros como los sistemas fijos están recorridos por sus respectivas corrientes en sentidos contrarios, de modo que los pares útiles se suman, mientras que la acción de un campo uniforme sobre los cuadros móviles es nula.

Se debe a *Irwin* un electrodinamómetro astático con un solo sistema fijo (fig. 3). Las dos bobinas fijas están recorridas por la corriente de excitación en tal forma que producen campos de sentidos contrarios al nivel de los lados exteriores de los dos cuadros que forman el sistema móvil. Los cuadros, dispuestos como indica la figura, están recorridos por la corriente en senti-

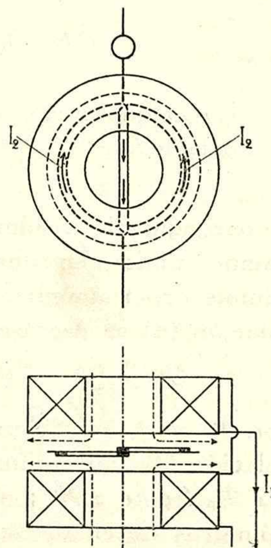


Fig. 3

dos opuestos. Hay pues un par útil, mientras que la acción de un campo uniforme sobre el conjunto de los dos cuadros no produce ningún efecto.

3) efectuar dos medidas haciendo pasar I_l en los dos sentidos (Θ_1 y $-\Theta_2$) y después otras dos medidas, invirtiendo I_2 y haciendo pasar I_l en los dos sentidos ($-\Theta_3$ y Θ_4); resulta

$$I_2 = \frac{C}{\Phi_l} \frac{(\Theta_1 + \Theta_2)(\Theta_3 + \Theta_4)}{\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4}$$

4) utilizar pantallas magnéticas o imanes compensadores regulables.

Cuando Θ_0 es prácticamente nulo, Θ pequeño, y se orienta el aparato de modo que $\beta \cong 0$ o $\beta = \pi$, el movimiento obedece muy sensiblemente a la ecuación clásica con coeficientes constantes; en efecto, se tiene entonces

$$K \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + A_0 \frac{d\Theta}{dt} + C\Theta = C_m$$

o sea

$$K \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \left[A_0 + \frac{(\Phi_l \pm \Phi_p)^2}{R_2} \right] \frac{d\Theta}{dt} + C\Theta = (\Phi_l \pm \Phi_p) I_2 \qquad (5)$$

resultado evidente porque si $\beta = 0$ o $\beta = \pi$, la dirección de B coincide con la del vector inducción del campo producido por las bobinas fijas.

b) *auto-excitación*. Este caso se presenta cuando se conectan las bobinas fija y móvil en paralelo o en serie; tal disposición carece de interés cuando se quiere emplear el electrodinamómetro como aparato de cero. En efecto, las relaciones (4), (4a) y (4b), que definían la posición de equilibrio en el caso anteriormente estudiado, son válidas aquí a condición de hacer $\Phi_l = M_0 I_2$ si las bobinas fijas y móvil están en serie y $\Phi_l = M_0 k I_2$ si están en paralelo, siendo k la relación entre la resistencia del cuadro móvil y la de las bobinas fijas. Así la relación (4b) se escribe, en el caso en que $k = 1$

$$(C - \Phi_p I_2 \, sen \, \beta) \Theta = M_0 I_2{}^2 + \Phi_p I_2 (cos \, \beta + \Theta_0 \, sen \, \beta) \qquad (4c)$$

Cuando I_2 se hace muy pequeño aumenta la influencia del término perturbador $\Phi_p I_2 \cos \beta$ frente al término útil $M_0 I_2{}^2$. Considerando sólo el término útil, se ve que las desviaciones son pro-

porcionales al cuadrado de la corriente, o sea que la sensibilidad en intensidad disminuye con la corriente. En definitiva, el electrodinamómetro con auto-excitación no presenta interés como aparato de cero.

II. *Funcionamiento en corriente alterna.*

a) *Excitación separada.* En este caso es más cómodo empezar el estudio haciendo abstracción de los campos parásitos, en particular del campo terrestre. Supongamos que se dispone en serie con la bobina móvil una fuente de f.e.m. $e_2 = E_{m2}\, sen\, wt$ y una impedancia; sabemos que aplicando el teorema de *Thévenin* generalizado todo esquema se reduce a ese circuito elemental, cuya impedancia total designaremos por $\mathbf{Z}_2 = Z_2 \underline{|\gamma}$. Admitimos que la corriente en las bobinas fijas es $i_1 = I_{m1}\, sen\, (wt + \varphi)$, independiente de la posición de la bobina móvil y de la corriente que la atraviesa; en esas condiciones, y suponiendo que $M = M_o\, sen\, (\Theta + \Theta_o)$, el flujo exterior a través de la bobina móvil es

$$\Phi = \Phi_{m1}\, sen\, (\Theta + \Theta_o)\, sen\, (wt + \varphi) \qquad (6)$$

donde $\Phi_{m1} = M_o\, I_{m1}$. La f.e.m. inducida en la bobina móvil es

$$e'_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi_{m1}\, w\, sen\, (\Theta + \Theta_o)\, cos\, (wt + \varphi) -$$

$$-\Phi_{m1}\frac{d\Theta}{dt} cos\, (\Theta + \Theta_o)\, sen\, (wt + \varphi) = e'_{2es} + e'_{2d} \qquad (7)$$

que se puede considerar como la suma de una f. e. m. estática $e'_{2es} = -\Phi_{m1}\, w\, sen\, (\Theta + \Theta_o)\, cos\, (wt + \varphi)$ producida por la variación del flujo con el tiempo, y de una f.e.m. dinámica $e'_{2d} = -\Phi_{m1}\frac{d\Theta}{dt}\times$ $\times\, cos\, (\Theta + \Theta_o)\, sen\, (wt + \varphi)$ debida al movimiento del cuadro.

La corriente total i_{2t} en la bobina móvil, producida por la f.e.m. $e_{2t} = e_2 + e'_{2es} + e'_{2d}$, es

$$i_{2t} = \frac{E_{m2}}{Z_2} sen\, (wt - \gamma) - \frac{\Phi_{m1} w}{Z_2} sen\, (\Theta + \Theta_o)\, cos\, (wt + \varphi - \gamma) -$$

$$-\frac{\Phi_{m1}}{Z_2}\frac{d\Theta}{dt} cos\, (\Theta + \Theta_o)\, sen\, (wt + \varphi - \gamma) = i_2 + i'_{2es} + i'_{2d} \qquad (8)$$

siendo i_2 la corriente debida a e_2, i'_{2es} la debida a e'_{2es} y i'_{2d} la debida a e'_{2d}.

El par electromagnético instantáneo es

$$\mathrm{c}_{mt} = i_{2t}\frac{d\Phi}{d\Theta} = \frac{E_{m2}\,\Phi_{ml}}{2\,Z_2}\cos(\Theta+\Theta_o)\,[\cos(\gamma+\varphi)-\cos(2wt+\varphi-\gamma)]-$$

$$-\frac{\Phi_{ml}^2 w}{4\,Z_2}\,sen\,2\,(\Theta+\Theta_o)\,[\,sen\,\gamma+sen\,(2\,wt+2\,\varphi-\gamma)\,]-$$

$$-\frac{\Phi_{ml}^2}{2Z_2}\frac{d\Theta}{dt}\cos^2(\Theta+\Theta_o)\,[\cos\gamma-\cos(2\,wt+2\varphi-\gamma)\,] \qquad (9)$$

Si el período ideal del aparato es grande frente al período de la corriente, la vibración de pulsación $2w$ debida a los pares alternos de (9) es de amplitud despreciable (ver el capítulo VII) y el único par a considerar es el valor medio C_{mt} de c_{mt}, es decir

$$C_{mt} = \frac{E_{m2}\,\Phi_{ml}}{2\,Z_2}\cos(\Theta+\Theta_o)\cos(\gamma+\varphi)-\frac{\Phi_{ml}^2\,w}{4\,Z_2}\,sen\,2\,(\Theta+\Theta_o)\,sen\,\gamma-$$

$$-\frac{\Phi_{ml}^2}{2\,Z_2}\frac{d\Theta}{dt}\cos^2(\Theta+\Theta_o)\cos\gamma = C_m + C_{es} + C_d \qquad (10)$$

donde C_m, C_{es} y C_d son los pares medios debidos a la acción de Φ sobre i_2, i'_{2es} y i'_{2d} respectivamente.

Consideremos ahora la acción de un campo parásito continuo, uniforme. El par debido a la acción de la componente horizontal de la inducción de este campo, B, sobre i_{2t}, es alterno de pulsación w, y por lo tanto no produce vibración de amplitud apreciable, ya que el período ideal del aparato es elevado respecto a $2\pi/w$. El movimiento del cuadro en el campo parásito produce una corriente no comprendida en (8), y la acción de B sobre esta corriente se traduce en un par de amortiguamiento adicional.

En lo que se refiere a los campos parásitos alternos, si el campo es síncrono de las corrientes de excitación y a medir, y su componente horizontal forma el ángulo β con el eje XX' de las bobinas fijas, se debe reemplazar (6) por

$$\Phi = \Phi_{ml}\,sen\,(\Theta+\Theta_o)\,sen\,(wt+\varphi) +$$

$$+\,\Phi_{mp}\,sen\,(\Theta+\Theta_o-\beta)\,sen\,(wt+\zeta) \qquad (6a)$$

donde Φ_{mp} es el flujo parásito máximo a través del cuadro móvil.

Un cálculo análogo al ya efectuado da sin dificultad la expresión del par medio, algo más complicada que (10); en particular, los términos adicionales que influyen sobre el equilibrio son

$$\frac{E_m \Phi_{mp}}{2 Z_2} \cos(\Theta + \Theta_0 - \beta) \cos(\gamma + \zeta) - \frac{\Phi_{mp}^2 w}{4 Z_2} sen\, 2(\Theta + \Theta_0 - \beta) sen\, \gamma -$$

$$- \frac{\Phi_{mp} \Phi_{m1} w}{2 Z_2} [sen\, \gamma \cos(\varphi - \zeta) sen(2\Theta + 2\Theta_0 - \beta) + \cos\gamma\, sen(\varphi - \zeta) sen\, \beta]$$

Obsérvese que las corrientes de *Foucault* inducidas por la corriente de la bobina móvil en las masas metálicas del electrodinamómetro, o aún situadas en su vecindad, crean un campo parásito síncrono, que puede ponerse en evidencia alimentando sólo la bobina móvil y comprobando que hay desviación. Las corrientes de *Foucault*, inducidas en las partes móviles del aparato, o masas metálicas vecinas, por la corriente de excitación, crean también campos parásitos síncronos; se tomarán las precauciones necesarias para eliminar dichos campos parásitos.

El efecto de las corrientes de *Foucault* inducidas por la corriente de excitación en las partes metálicas fijas del aparato equivale a una modificación de Φ_{m1} y φ.

Si el campo parásito es de pulsación w' diferente de w, y si el período ideal del aparato es grande frente al valor absoluto de $\frac{2\pi}{w - w'}$, se agregan a (10) solamente dos términos, debidos a la acción del flujo $\Phi'_{mp}\, sen(\Theta + \Theta_0 - \beta)\, sen(w't + \zeta)$ sobre las corrientes estáticas y dinámicas que produce ese mismo flujo; por supuesto estos dos pares existen también cuando el aparato funciona en corriente continua. Sólo el primero de ellos influye sobre la posición de equilibrio; su valor es

$$- \frac{\Phi'^2_{mp} w'}{4 Z'_2} sen\, 2(\Theta + \Theta_0 - \beta)\, sen\, \gamma'$$

donde $Z'_2 \underline{|\gamma'}$ es la impedancia del circuito del cuadro móvil a la pulsación w'; por lo tanto la presencia de un campo parásito exterior, sea síncrono o no síncrono, se pone en evidencia observando si hay desviación con el cuadro móvil cerrado sobre una impedancia conveniente y con las bobinas fijas no excitadas; obsérvese que la desviación varía con la orientación del aparato.

La construcción astática permite eliminar la influencia de los campos parásitos exteriores, si son uniformes.

Se concibe que la perturbación ocasionada por los campos parásitos es tanto menor cuanto mayor es el campo producido por las bobinas excitadoras; desde este punto de vista hay interés en emplear aparatos con núcleo de hierro. Es de notar que el flujo que producen las bobinas con núcleo de hierro está defasado sobre la intensidad de excitación en cierto ángulo, debido a la histéresis y a las corrientes de *Foucault*. La resistencia aparente de tales bobinas crece rápidamente con la frecuencia.

En los electrodinamómetros propiamente dichos, abstracción hecha de los galvanómetros de inducción, se trata de hacer $\Theta_0 = 0$; lo supondremos muy pequeño; si además las desviaciones Θ son también pequeñas, la expresión (10) del par se transforma en

$$C_{mt} = \frac{E_{m2}\,\Phi_{ml}}{2\,Z_2}\cos(\gamma+\varphi) - \frac{\Phi_{ml}^2\,w}{2\,Z_2}(\Theta+\Theta_0)\,sen\,\gamma -$$

$$- \frac{\Phi_{ml}^2}{2\,Z_2}\,\frac{d\Theta}{dt}\cos\gamma \qquad (10a)$$

relación que evidentemente vale cualquiera que sean Θ y Θ_0 si el cuadro móvil se mueve en un campo radial de intensidad constante. La ecuación de movimiento es

$$K\,\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \left(A_0 + \frac{\Phi_{ml}^2}{2\,Z_2}\cos\gamma\right)\frac{d\Theta}{dt} + \left(C + \frac{\Phi_{ml}^2\,w}{2\,Z_2}\,sen\,\gamma\right)\Theta =$$

$$= \frac{E_{m2}\,\Phi_{ml}}{2\,Z_2}\cos(\gamma+\varphi) - \frac{\Phi_{ml}^2\,w}{2\,Z_2}\,\Theta_0\,sen\,\gamma \qquad (11)$$

Se ve que el período propio T y el grado de amortiguamiento α dependen de la amplitud de la corriente de excitación, de la frecuencia y de la constitución del circuito de la bobina móvil. Obsérvese que $sen\,\gamma < 0$ si el circuito de la bobina móvil es capacitivo y $sen\,\gamma > 0$ si este circuito es sélfico; a igualdad de los otros parámetros y de $|\,sen\,\gamma\,|$, los valores de T y α son mayores en el primer caso que en el segundo.

El examen de (11) muestra que salvo que Θ_0 o $sen\,\gamma$ sean nulos, se constata una desviación al excitar las bobinas fijas, aún en ausencia de f.e.m. en el circuito de la bobina móvil ($E_{m2} = 0$), si este circuito está cerrado. En el parágrafo siguiente volveremos sobre esta interesante propiedad del aparato.

La sensibilidad en tensión del aparato S_{ta} (a la que se puede hacer corresponder la sensibilidad en intensidad ficticia $S'_{ia} = \Theta / I_2$, donde $I_2 = E_2 / Z_2$) sólo es independiente de la f.e.m. a medir si $\Theta_o = 0$ o $sen\,\gamma = 0$; en el primer caso se tiene

$$S_{ta} = \frac{\Theta}{E_2} = \frac{\dfrac{\Phi_{m1}}{\sqrt{2}\,Z_2} \cos(\gamma + \varphi)}{C + \dfrac{\Phi_{m1}^2\,w}{2\,Z_2}\,sen\,\gamma} \tag{12}$$

Vemos que se puede aumentar S_{ta} haciendo $sen\,\gamma < 0$ (circuito de la bobina móvil capacitivo); además hay interés en regular φ de modo que

$$\cos(\gamma + \varphi) = 1$$

o sea $\varphi = -\gamma$; dicho de otra manera, hay interés en que I_1 y I_2 estén en fase. El hecho de que la sensibilidad del aparato dependa del ángulo que forman I_1 e I_2 es un inconveniente, porque este ángulo es susceptible de variar al efectuar los ajustes que implica la medida: por este motivo muchas veces hay que agregar al circuito de ensayo un dispositivo especial que permita regularlo.

Salvo si $sen\,\gamma = 0$, la sensibilidad depende de la frecuencia. Se puede definir la sensibilidad en volt como

$$S_{va} = \frac{\Theta}{U_2} = \frac{\dfrac{\Phi_{m1}}{\sqrt{2}\,Z_{2g}}}{C + \dfrac{\Phi_{m1}^2\,w}{2\,Z_{2g}}\,sen\,\gamma_g} \tag{13}$$

donde U_2 es la d.d p. aplicada directamente en los bornes de la bobina móvil y la impedancia del circuito se reduce a la de la bobina móvil $Z_{2g}\,\underline{|\gamma_g}$; se supone que se cumple $\varphi = -\gamma_g$.

Salvo si $\dfrac{\Phi_{m1}^2\,w}{2\,Z_{2g}}\,sen\,\gamma_g$ y $\dfrac{\Phi_{m1}^2\,w}{2\,Z_2}\,sen\,\gamma$ son despreciables frente a C, y $\cos(\gamma + \varphi) = 1$, el conocimiento de S_{va} no permite deducir simplemente la S_{ta} correspondiente a una medida hecha en un circuito de impedancia $\mathbf{Z}_2 \neq \mathbf{Z}_{2g}$. Dicho de otro modo, es preciso que $\dfrac{\Phi_{m1}^2\,w}{2\,Z_2}\,sen\,\gamma \ll C$ y $\cos(\gamma + \varphi) = 1$ para que la sensibilidad en intensidad ficticia sea una constante del aparato; se tiene entonces $S'_{ia} = \dfrac{\Phi_{m1}}{\sqrt{2}\,C}$, y $S'_{ia} = S_i$ si el flujo alterno eficaz es igual al flujo

continuo; en esta discusión de la sensibilidad se han supuesto despreciables todos los flujos parásitos.

La medida de $\alpha_0 = A_0 / 2\sqrt{KC}$ y $T_0 = 2\pi\sqrt{K/C}$, de S'_{ia} o S_i, y finalmente de la resistencia crítica R_c, que se determina con el circuito de la bobina móvil puramente resistente ($sen\,\gamma = 0$), da, como en el galvanómetro de cuadro móvil (ver el capítulo VI), K, C, A_0 y Φ_l, permitiendo estudiar numéricamente la influencia del circuito de la bobina móvil sobre el funcionamiento del aparato.

Consideremos ahora el caso en que la corriente de excitación y la f.e.m. a medir tienen armónicos

$$i_l = \Sigma\, I_{mlh}\, sen\,(hwt + \psi_h + \varphi_h)$$

$$e_2 = \Sigma\, E_{m2h}\, sen\,(hwt + \psi_h)$$

Los armónicos de la corriente de excitación sólo producen un par medio no nulo con los armónicos de la misma frecuencia de la corriente total en el cuadro móvil, de manera que la relación (10a) se escribe

$$C_{mt} = \sum \frac{E_{m2h}\,\Phi_{mlh}}{2\,Z_{2h}} cos\,(\gamma_h + \varphi_h) - (\Theta + \Theta_0) \sum \frac{\Phi_{mlh}^2\,hw}{2\,Z_{2h}}\,sen\,\gamma_h$$

$$- \frac{d\,\Theta}{d\,t} \sum \frac{\Phi_{mlh}^2}{2\,Z_{2h}} cos\,\gamma_h \qquad (14)$$

donde $\Phi_{mlh} = M_0\, I_{mlh}$; $\mathbf{Z}_{2h} = Z_{2h} \underline{|\gamma_h}$ es la impedancia del circuito de la bobina móvil a la pulsación hw. La ecuación (11) se modifica en consecuencia; el grado de amortiguamiento y el período propio del aparato dependen de los armónicos de la corriente de excitación, y la desviación de equilibrio de esos mismos armónicos y de los comunes a la corriente de excitación y a la f.e.m. a medir; si los armónicos no son despreciables, la medida no responde a nada preciso.

b) *Autoexcitación.* Si la misma corriente, o fracciones de la misma, pasan por las bobinas fijas y móvil, la sensibilidad disminuye con la corriente; el dispositivo carece de interés en la medida de corrientes débiles.

2. Galvanómetros de inducción. — Es un caso particular del electrodinamómetro. Si cerramos la bobina móvil sobre una impedancia y excitamos la bobina fija con la corriente $i_l = I_{ml} sen\,(wt + \varphi)$, nos encontramos en el caso estudiado en el parágrafo 1, IIa, don-

de se hace $E_2 = 0$. Si admitimos que $M = M_o \, sen \, (\Theta + \Theta_o)$, la expresión (10) del par electromagnético sigue siendo válida con $C_m = 0$. La bobina móvil desvía; la posición de equilibrio está definida por

$$C \Theta = - \frac{M_o^2 \, I_{m1}^2 \, w}{4 \, Z_2} \, sen \, 2 \, (\Theta + \Theta_o) \, sen \, \gamma \qquad (15)$$

de modo que el aparato puede servir para medir I_{m1}; para aumentar la sensibilidad se hace $\Theta_o = \pi/4$.

Reemplazando la bobina móvil por un simple disco cuyo plano forma en reposo un ángulo de 45° con el eje de la bobina fija, se obtiene el galvanómetro de *Fleming*.

El galvanómetro de inducción es poco interesante porque las desviaciones son proporcionales al cuadrado de la corriente y dependen de la frecuencia y de la forma de onda de la corriente; en efecto, en corriente no sinusoidal, con $\Theta_o = \pi/4$ y Θ pequeña

$$C \Theta = - \sum \frac{M_o^2 \, I_{m1h}^2 \, hw}{4 \, Z_{2h}} \, sen \, \gamma_h \qquad (16)$$

y si los armónicos no son despreciables la medida no responde a nada preciso.

Observemos que en corriente sinusoidal el sistema móvil queda en cero cualquiera que sea el valor de la corriente I_{m1} en la bobina fija si $sen \, \gamma = 0$; esa propiedad permite utilizar el aparato en la medida de capacidades y coeficientes de self (galvanómetro de inducción de Trüb-Täuber).

3. Utilización de los electrodinamómetros.

1) *En corriente continua.* El aparato puede servir para efectuar medidas relativas y "absolutas". A los efectos de la medida "absoluta" de la intensidad de la corriente se reúnen en serie las bobinas fija y móvil; la construcción debe permitir el cálculo suficientemente preciso de la fuerza o par electrodinámico que se ejerce entre los sistemas fijo y móvil; se opera llevando el sistema móvil, recorrido por la corriente, a la posición inicial, sea por torsión de la suspensión, sea por masas adicionales, si el aparato es del tipo "balanza".

El primer electrodinamómetro del tipo de torsión se debe a *Weber* (1846); una suspensión bifilar sostiene la bobina móvil en el centro de una bobina fija; en ausencia de corrientes los planos de las espiras de las dos bobinas forman un ángulo de 90°. El aparato se utiliza de preferencia para la medida relativa de las

corrientes pequeñas, pero puede servir para medidas "absolutas"; en el primer caso las bobinas deben estar constituídas por numerosas espiras para aumentar la sensibilidad; en el segundo caso es ventajoso formar las bobinas con solenoides de una sola capa *(Gray)*, de dimensiones convenientes, porque entonces el cálculo del par motor puede hacerse con gran exactitud. *Latimer Clark* construyó un electrodinamómetro "absoluto" donde tanto el sistema de bobinas fijo como el móvil eran bobinas de *Helmholtz*.

Aunque el electrodinamómetro, sea de torsión, sea de balanza, constituye actualmente el medio más exacto para realizar la medida "absoluta" de la intensidad de la corriente, no insistimos, puesto que el único tema que nos ocupa aquí es la medida relativa de las corrientes pequeñas En los aparatos constituídos a este último efecto, la necesidad de tener una sensibilidad suficiente cuando la corriente tiende a cero nos obliga a elegir la excitación independiente; la necesidad de eliminar la influencia de los campos parásitos, en particular del campo terrestre, nos hace adoptar la construcción astática, o mucho mejor, un núcleo de hierro, porque esta solución aumenta considerablemente más la sensibilidad; en definitiva, llegamos al galvanómetro de cuadro móvil con electroimán; pero ya vimos en el capítulo III, 3 que estos aparatos no ofrecen ventajas frente a los galvanómetros de cuadro con imán permanente, porque no conviene aumentar demasiado la inducción, y con imanes permanentes se obtienen las mayores sensibilidades deseables sin los inconvenientes de la excitación separada. De modo que los electrodinamómetros no presentan ningún interés para la medida de las corrientes continuas muy débiles (abstracción hecha del galvanómetro de cuerda); por el contrario son muy útiles en la medida de potencias, tema que no nos corresponde tratar aquí.

2) *En corriente alterna.* El verdadero interés de los electrodinamómetros-galvanómetros reside en su empleo en corriente alterna. Se distinguen dos clases de aparatos, con y sin hierro; en los dos casos se trabaja, por supuesto, con excitación independiente. En los aparatos sin hierro se obtienen sensibilidades prácticas (ver el parágrafo 11), a las frecuencias industriales, del orden de 10 mm/m.μA, y en los aparatos con hierro, del orden de 500 mm/m.μA *(Abraham, Weibel)*; como ya dijimos, los aparatos sin hierro son sensibles a los campos parásitos, en particular a los síncronos de la corriente a medir.

Examinemos rápidamente los pares perturbadores que no han han sido considerados en el curso del estudio hecho más arriba en el parágrafo I, IIa.

En frecuencia acústica se pueden producir pares perturbadores sensibles debidos por una parte a las corrientes de *Foucault* en las partes metálicas del órgano móvil, en la masa del enrollamiento, eventualmente en el amortiguador, etc., y por otra a las corrientes de capacidad entre espiras. Estos pares se ponen en evidencia observando si el órgano móvil desvía cuando se excita el aparato con corriente de frecuencia acústica, estando abierto el circuito de la bobina móvil.

En frecuencia acústica se observa en ciertas condiciones un movimiento anormal de la bobina móvil, debido a que el sistema móvil posee más de un grado de libertad y es susceptible de una translación que se efectúa en un campo en realidad no uniforme (*Weibel*).

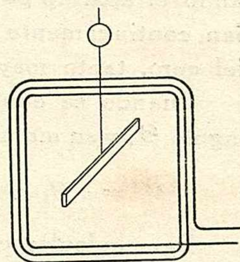
Hay que evitar cuidadosamente la presencia de impurezas ferromagnéticas en el órgano móvil, porque no siendo el campo radial, dan lugar a una desviación del cuadro móvil bajo la influencia del campo de las bobinas fijas y también de los campos parásitos; se verifica la ausencia de estas impurezas observando que el cuadro móvil queda en reposo si, estando su circuito abierto, se excita el aparato con corriente continua o alterna de frecuencia industrial.

Muchas veces son importantes los pares perturbadores de origen electrostático, de expresión $\frac{1}{2} U^2 \frac{dC'}{d\Theta}$, donde U designa la d.d p. entre una parte fija y la parte móvil, y C' la capacidad del condensador cuyas armaduras son la parte móvil y la parte fija en cuestión. Para reducir ese par se emplean pantallas electrostáticas que rodean al órgano móvil; estas pantallas están formadas por hojas metálicas muy finas, divididas para reducir al mínimo las corrientes de *Foucault*, o por una pintura conductora aplicada sobre las caras de las piezas fijas.

Los inconvenientes más serios del aparato, aún construído en forma de eliminar los pares perturbadores, son los ya mencionados, de ser muy sensible, y en forma difícil de tener en cuenta, a los armónicos, y de tener una sensibilidad función del defasaje $(\gamma+\varphi)$ entre las corrientes I_1 e I_2, lo que puede obligar a complicar el dispositivo de medida. Por eso, y salvo en casos particula-

res, se prefiere utilizar el galvanómetro de resonancia o el teléfono como aparato de cero, y el galvanómetro de resonancia para medir la amplitud de la onda fundamental de una corriente. En cambio, la intervención del factor $cos(\gamma + \varphi)$ hace que los electrodinamómetros sean muy interesantes para la medida del producto escalar de las corrientes, y en particular en la medida de la potencia.

4. Galvanómetros electromagnéticos de hierro dulce. — Consideremos una aguja de sustancia ferromagnética, de dimensiones transversales muy pequeñas frente a la longitud, suspendida por un hilo de constante de torsión C en el centro de un cuadro fijo recorrido por una corriente alterna sinusoidal $i = I_m \, sen \, wt$, que se quiere revelar o medir (fig. 4). La corriente crea en el centro del cuadro un campo $\mathbf{g}i$ que admitimos uniforme en el espacio interesado por el movimiento de la aguja. La aguja está además sometida a la acción del campo magnético terrestre, cuya componente horizontal representamos por $\mathbf{H}_t$. Suponemos despreciables los efectos de la histéresis y de la saturación. Sea AA' (fig. 5) la dirección que tomaría la aguja en ausencia del campo $\mathbf{H}_t$ y sin estar excitado el cuadro; sea Θ_o el ángulo que forma con AA' la dirección de la aguja en presencia del campo $\mathbf{H}_t$, sin estar excitado el cuadro, y Θ el ángulo que desvía la aguja, a partir de la posición precedente, al excitar el cuadro. Los ángulos que forman $\mathbf{H}_t$ y $\mathbf{g}i$ con AA' son α y β respectivamente.


Fig. 4

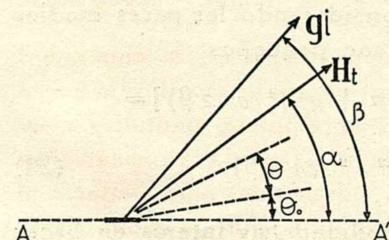


Fig. 5

Podemos admitir con suficiente aproximación que, a causa del importante factor de desimantación transversal, sólo producen imantación las componentes de los campos según el eje de la aguja.

Consideremos primero la posición de equilibrio de la aguja en ausencia de corriente. Su momento magnético es $\mathbf{M} = M \underline{|\Theta_o}$, con

$$M = a \, H_t \, cos\,(\alpha - \Theta_o) \qquad (17)$$

donde a es una constante. El par es $C_m = M \wedge H_t$, de modo que la posición de equilibrio Θ_o está definida por

$$C\Theta_o = H_t\, M\, sen\, (\alpha - \Theta_o) = a \frac{H_t^{\,2}}{2} sen\, 2\, (\alpha - \Theta_o) \qquad (18)$$

Si Θ_o es muy pequeño, la relación (18) se escribe

$$\Theta_o\, (C + a\, H_t^{\,2} \cos 2\, \alpha) = \frac{a}{2} H_t^{\,2}\, sen\, 2\, \alpha \qquad (19)$$

Se ve que el cero del aparato está influído por el campo terrestre. No se puede suprimir completamente esta influencia orientando el aparato para realizar $\alpha = 0$ porque α, y también H_t, varían continuamente con el tiempo. Eso provoca modificaciones del cero, tanto mayores cuanto más sensible es el aparato.

Cuando se envía la corriente i a la bobina, la aguja gira un ángulo Θ, y su momento magnético pasa a ser $M' = M' \underline{| \Theta + \Theta_o}$, con

$$M' = a\, H_t \cos (\alpha - \Theta_o - \Theta) + gi \cos (\beta - \Theta_o - \Theta) \qquad (17a)$$

Para calcular el par observemos que tanto la acción del campo alterno gi sobre la parte del momento M' independiente de i, como la acción del campo H_t sobre la parte del momento M' proporcional a i, son alternas. Suponemos aquí, como ya lo hicimos en el caso del electrodinamómetro, que el período ideal del órgano móvil es lo suficientemente grande como para que la amplitud de la vibración producida por los pares alternos sea despreciable. En definitiva se deduce, considerando los pares medios y suponiendo que tanto Θ_o como Θ son pequeños

$$(\Theta_o + \Theta)\, [C + a\, (H_t^{\,2} \cos 2\, \alpha + g^2\, I^2 \cos 2\, \beta)\,] =$$

$$= \frac{a}{2} (H_t^{\,2}\, sen\, 2\, \alpha + g^2\, I^2\, sen\, 2\, \beta) \qquad (20)$$

Se ve que para aumentar la sensibilidad hay interés en hacer muy aproximadamente $2\, \beta = \pi/2$; en esas condiciones

$$\Theta + \Theta_o = \frac{a\, (H_t^{\,2}\, sen\, 2\, \alpha + g^2\, I^2)}{2\, (C + a\, H_t^{\,2} \cos 2\, \alpha)} \qquad (20a)$$

de donde, teniendo en cuenta la relación (19)

$$\Theta = \frac{a\, g^2\, I^2}{2\, (C + a\, H_t^{\,2} \cos 2\, \alpha)} \qquad (21)$$

De modo que $\mathbf{H}_t$ influye sobre las desviaciones del galvanómetro; la sensibilidad varía con la orientación del aparato y con el tiempo. Si en primera aproximación despreciamos H_t, (19) y (21) dan

$$\Theta_0 = 0 \quad \text{y} \quad \Theta = \frac{a\,g^2}{C} I^2 \qquad (22)$$

es decir, con $H_t = 0$ y $\beta = \pi/4$ las desviaciones del aparato son proporcionales al cuadrado de la intensidad, lo que es un inconveniente cuando se trata de revelar corrientes muy pequeñas.

Si la corriente medida es alterna no sinusoidal

$$i = \Sigma\, I_{mh}\, sen\,(hw\,t - \varphi_h)$$

sólo producen pares medios no nulos las acciones de cada armónico sobre la imantación producida por él mismo; basta pues, para obtener la expresión del par, reemplazar en (20) I^2 por $\Sigma\, I_h{}^2$; si se desprecia H_t, las desviaciones son proporcionales al cuadrado del valor eficaz de la corriente, cualquiera que sea la forma de su onda. Si la bobina fija está recorrida por una corriente continua I_c, hay por supuesto interacción entre $\mathbf{H}_t$ y la imantación debida a gI_c y entre gI_c y la imantación debida a $\mathbf{H}_t$. En lugar de la relación (20) se tiene

$$\Theta + \Theta_0 = \frac{a\,[H_t{}^2\, sen\, 2\,\alpha + g^2\, I_c{}^2\, sen\, 2\,\beta + 2\,gH_t\, I_c\, sen\,(\alpha+\beta)]}{2\{C + a[H_t{}^2 cos\, 2\,\alpha + g^2 I_c{}^2\, cos\, 2\beta + 2H_t\, gI_c\, cos(\alpha+\beta)]\}} \qquad (23)$$

Aún siendo despreciables los efectos de la histéresis, la curva de calibración del aparato sólo sería la misma en corriente continua que en alterna si se pudiese despreciar también H_t.

El aparato que acabamos de examinar es el galvanómetro *Bellati - Giltay*; se puede observar su analogía con el galvanómetro *Nobili* no astático (ver el capítulo II, 6); la aguja imantada de este último se reemplaza aquí por un haz de hilos de hierro dulce, orientados de modo que en ausencia de corriente su eje forme un ángulo de 45° con el de la bobina fija.

Estudiemos ahora el caso del mismo aparato modificado por supresión del par de torsión elástico, que se reemplaza por un par director magnético, disponiendo a tal efecto un imán permanente. En ausencia de corriente la aguja se orienta en la dirección del campo $\mathbf{H}_r$, resultante de la superposición del campo director $\mathbf{H}_d$ y del campo terrestre $\mathbf{H}_t$.

Para poner en evidencia las fluctuaciones del cero, hagamos $H_t = H_{t1} + \triangle H_t$, donde H_{t1} es el valor particular de H_t en un instante arbitrario. Se tiene $H_r = H_{r1} + \triangle H_t$, donde $H_{r1} = H_d + H_{t1}$. Las oscilaciones de la aguja a partir de la posición de equilibrio correspondiente a H_{r1} están definidas por (fig. 6)

$$\triangle \Theta_o \simeq \frac{\triangle H_t \, sen\, \gamma}{H_{r1} + \triangle H_t \cos \gamma} \qquad (24)$$

Para tener un cero más estable hay que reducir $\triangle H_t$ frente a H_{r1}, lo que evidentemente sólo se puede hacer a costa de la sensibilidad.

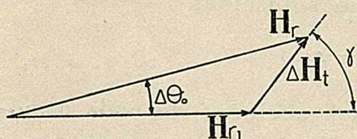


Fig. 6

Al excitar la bobina, y despreciando las variaciones del campo terrestre, se obtiene una desviación dada por

$$\Theta = \frac{g^2 I^2 \, sen\, 2\beta}{2\,(H_{r1}^{\,2} + g^2 I^2 \cos 2\beta)} \qquad (25)$$

relación que se puede obtener a partir de (20) si se hace $C = 0$, $\Theta_o = \alpha = 0$ y se reemplaza H_t por H_{r1}. Si $\beta = \pi/4$

$$\Theta = \frac{g^2 I^2}{2\, H_{r1}^2} \qquad (25a)$$

Es posible independizarse de la influencia del campo terrestre eligiendo un sistema móvil formado por dos agujas de hierro dulce idénticas, cuyos ejes forman entre sí 90°, situadas en planos horizontales distintos, fijas cada una en su centro a un hilo común, cuyo eje es el de rotación del sistema.

Supongamos que el conjunto está dispuesto en un campo uniforme H cuya dirección forma un ángulo α con una de las agujas. El par total que se ejerce sobre el sistema es

$$C_m = a H^2 \cos\alpha \, sen\,\alpha + a H^2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) sen\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

El sistema es astático.

Con el fin de duplicar el par motor se puede colocar cada una de las agujas en el interior de una bobina fija, disposición algo análoga a la del galvanómetro de imán de *Lord Kelvin* (ver el capítulo II, 8), pero las agujas forman ángulos de 45° con los ejes de las bobinas, y 90° entre sí.

5. Galvanómetro de Guinchant. — Este aparato utiliza un campo director debido a una corriente síncrona de la corriente a medir. Consiste en dos sistemas idénticos de bobinas fijas coaxiales, *1* y *1'* (fig 7), recorridas por la corriente $i_1 = I_{m1} \operatorname{sen} (wt - \varphi)$ a revelar, y *2* y *2'*, recorridas por una corriente $i_2 = I_{m2} \operatorname{sen} wt$ auxiliar, de amplitud constante. Los ejes de las bobinas son horizontales y forman entre sí un ángulo de 90°; en su intersección se dispone una aguja de hierro dulce suspendida de un hilo sin torsión.

Supongamos que el aparato se orienta de tal modo que el eje de las bobinas *1* y *1'* está contenido en el meridiano terrestre. Cuando la aguja forma un ángulo Θ con el eje de las bobinas *1* y *1'*, su momento magnético es, despreciando los fenómenos de histéresis y de saturación, $M\underline{|\Theta}$, con

$$M = a\left[\left(gi_1 + H_t\right)\cos\Theta + gi_2 \operatorname{sen}\Theta\right] \quad (26)$$

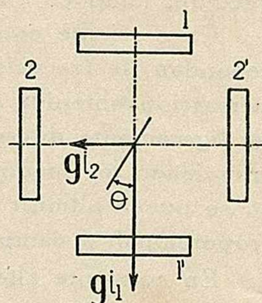


Fig. 7

El par instantáneo que se ejerce sobre la aguja es

$$c_m = \frac{a}{2}\left\{\operatorname{sen} 2\Theta\left[\left(gi_1 + H_t\right)^2 - g^2 i_2{}^2\right] - 2\cos 2\Theta\left(gi_1 + H_t\right) gi_2\right\} \quad (27)$$

El par medio es

$$C_m = \frac{a}{2}\left[\operatorname{sen} 2\Theta\left(g^2 I_1{}^2 - g^2 I_2{}^2 + H_t{}^2\right) - \right.$$
$$\left. - 2\cos 2\Theta\, g^2 I_1 I_2 \cos\varphi\right] \quad (28)$$

La posición de equilibrio corresponde a $C_m = 0$, o sea a un Θ tal que

$$tg\, 2\Theta = \frac{2 I_1 I_2 \cos\varphi}{I_1{}^2 - I_2{}^2 + H_t{}^2 / g^2} \quad (29)$$

Guinchant compensaba H_t con ayuda de un imán permanente convenientemente orientado. En esas condiciones, cuando el galvanómetro se utiliza como aparato de cero, es decir, cuando $I_2{}^2$ es despreciable frente a $I_1{}^2$ y $tg\, 2\Theta \cong 2\Theta$, se tiene

$$\Theta \cong \frac{I_2 \cos\varphi}{I_1} \quad (30)$$

Se observa que la desviación cambia de sentido con I_2; en los puentes de corriente alterna el galvanómetro se comporta igual

que los galvanómetros de corriente continua en los puentes de corriente continua: la desviación cambia de sentido cuando en el ajuste se pasa por el valor de equilibrio.

La sensibilidad del aparato depende del ángulo que forman entre sí I_1 e I_2, lo que es un inconveniente.

6. Utilización de los galvanómetros de hierro dulce. — Los galvanómetros de hierro dulce no presentan ningún interés en corriente continua, y, por lo menos en el estado actual de la construcción, tampoco en corriente alterna.

En corriente continua la histéresis hace que las desviaciones dependan de los valores anteriores de la corriente; la curva de calibración obtenida con valores crecientes de la corriente puede ser ligeramente diferente de la obtenida con valores decrecientes. Intervienen los fenómenos de saturación, de modo que en realidad no se puede admitir que el momento magnético de la aguja sea proporcional al campo que lo crea.

En corriente alterna, además del efecto de la saturación, hay que tener en cuenta el par parásito debido a la acción de la corriente a medir sobre las corrientes de *Foucault* inducidas en la aguja, par cuyo cálculo ya se hizo, en principio, en el estudio de los electrodinamómetros. Para reducir esta causa de perturbación, se subdivide la aguja formándola por hilos muy finos.

A menos de precauciones especiales (sistemas astáticos, pantallas) los aparatos de hierro dulce son muy sensibles a los campos parásitos continuos y alternos, como lo demuestra el estudio hecho en los parágrafos 4 y 5.

7. Galvanómetros térmicos. — Todos los aparatos térmicos tienen un elemento calentado por la corriente a medir; según el efecto de ese calentamiento, se los puede dividir en varias clases:

1) aparatos de hilo dilatable;
2) aparatos de efecto termoeléctrico;
3) aparatos termométricos;
4) aparatos de variación de resistencia (bolómetros).

Aquí estudiaremos únicamente las dos primeras clases; la tercera sólo presenta un interés histórico; la cuarta interesa particularmente en alta frecuencia.

Los aparatos térmicos tienen la ventaja de ser insensibles a los campos exteriores; además, a igualdad de corriente eficaz, su desviación es independiente de la frecuencia entre límites muy

amplios, que dependen, por supuesto, de la construcción; aquí sólo nos interesan los aparatos para frecuencias industriales y acústicas no muy elevadas.

Un serio inconveniente de los aparatos térmicos es su pequeña capacidad de sobrecarga, que obliga a utilizarlos con gran cuidado; además la temperatura ambiente influye sobre el cero y las desviaciones de ciertos aparatos.

8. **Aparatos de hilo dilatable.** — Consideremos un hilo conductor fijo en los extremos, cuya resistencia por unidad de longitud a la temperatura ambiente, T, es r; sea λ el coeficiente medio de dilatación lineal del hilo y α el coeficiente medio de temperatura de la resistividad, ambos entre T y $T' = T + \Theta$, donde Θ es el calentamiento de equilibrio del hilo bajo el efecto del pasaje de una corriente continua constante I.

El alargamiento unitario del hilo es

$$\triangle L/L \cong \lambda \Theta \qquad (31)$$

y la resistencia unitaria a la temperatura T' es

$$r' \cong r(1 + \alpha \Theta) \qquad (32)$$

Despreciemos el calor evacuado por los extremos del hilo y expresemos que a la temperatura de equilibrio T' todo el calor desprendido por efecto *Joule* se disipa por radiación y convección; supondremos válida la ley de *Newton*, de manera que resulta

$$r(1 + \alpha \Theta) I^2 \cong a \Theta \qquad (33)$$

donde el coeficiente a, función de la naturaleza, del estado de la superficie y del diámetro del hilo, así como del medio ambiente, representa la cantidad de calor disipada en la unidad de tiempo por la superficie lateral de la unidad de longitud del hilo, por grado de diferencia de temperatura a la temperatura T'. En primera aproximación admitimos que a, λ y α son constantes. Eliminando Θ entre (31) y (33) se obtiene

$$\triangle L/L \cong \lambda \frac{r I^2}{a - \alpha r I^2} \qquad (34)$$

Si $\alpha r I^2$ es pequeño frente a a, el alargamiento unitario del hilo es prácticamente proporcional al cuadrado de la intensidad de la corriente. Como en general $\triangle L$ es muy pequeño, se reemplaza su medida por la de la variación de la flecha del hilo, $\triangle f$,

que es mucho mayor. En efecto, la flecha del hilo, tendido en el punto medio (fig. 8), es

$$\triangle f \cong \sqrt{L \triangle L/2} \tag{35}$$

y por consiguiente

$$\frac{\triangle f}{\triangle L} \cong \sqrt{\frac{1}{2\lambda\Theta}} \tag{36}$$

En numerosos metales λ es del orden de $\sim 2.10^{-5}$; si se hace $\Theta = 100^0$, $\triangle f/\triangle L \cong 15$: la amplificación es importante.

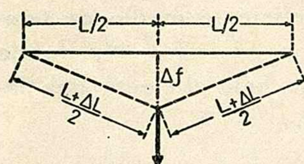


Fig. 8

Las relaciones (34) y (35) ponen en evidencia que si $\alpha r I^2 \ll \alpha$, al utilizar $\triangle f$ en lugar de $\triangle L$ las desviaciones son proporcionales a la intensidad de la corriente. En realidad este resultado no es el que se obtiene en la práctica, porque, además de las aproximaciones ya mencionadas, en ausencia de corriente la flecha del hilo no es nula y la fuerza no se aplica exactamente en el punto medio del hilo.

En el aparato Hartmann y Braun (fig. 9) el sistema de amplificación descripto se utiliza dos veces; el hilo calefactor, de platino iridiado, que soporta bien grandes elevaciones de temperatura sin oxidarse, fijo en A y A', está tendido por un hilo auxiliar 1, de bronce fosforoso; cerca del punto medio de este último se fija un hilo de seda 2 que pasa por una polea p y está tendido por un resorte r. Sobre el eje de la polea se fija un índice; se comprende que todo alargamiento del hilo se traduce por cierta rotación de aquél.

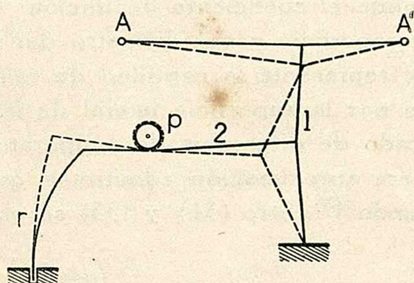


Fig. 9

El cero del aparato depende de la temperatura ambiente; para independizarlo no basta que el coeficiente de dilatación de la placa en la que están fijos los bornes A y A' sea igual al del hilo, porque a causa de la gran inercia térmica del soporte, éste tarda más que el hilo en llegar a la temperatura de equilibrio, y la compensación sólo es buena si la variación de la temperatura ambiente es lenta. Para salvar este inconveniente se

han adoptado dispositivos especiales (p. ej. el hilo de compensación) sobre los que no insistimos, porque los aparatos de hilo dilatable (aún con índice óptico) son poco sensibles y por consiguiente no se emplean como aparatos de cero.

Para aumentar la sensibilidad hay interés en disminuir la sección y aumentar la longitud del hilo dilatable, pero se llega pronto al límite por consideraciones de lugar ocupado, de solidez mecánica, de capacidad de sobrecarga y de inercia térmica. La importancia de este último factor aparece al estudiar el funcionamiento del aparato en corriente alterna $i = I_m \, sen \, wt$. La cantidad de calor desprendida por unidad de longitud del hilo en un intervalo de tiempo dt es:

$$r' i^2 \, dt = r' I^2 (1 - cos \, 2 \, wt) \, dt \qquad (37)$$

y si el efecto de la componente de pulsación $2 w$ es despreciable, o sea, si la inercia térmica del hilo es suficiente, todo pasa como si el hilo estuviese recorrido por una corriente continua de valor igual al valor eficaz de la corriente alterna. En caso contrario, el calentamiento del hilo, y por consiguiente su alargamiento, son función del tiempo, y la relación (33) debe reemplazarse por

$$r (1 + \alpha \theta) \, I^2 (1 - cos \, 2 \, wt) \, dt = mc \, d\theta + a \, \theta \, dt \qquad (38)$$

donde θ es el calentamiento en un instante considerado, m la masa del hilo por unidad de longitud y c el calor específico.

La reducción de la sección del hilo dilatable ofrece la ventaja de disminuir el efecto pelicular, es decir, de ampliar la zona de frecuencias en la que vale el calibrado hecho en corriente continua. Esta observación vale también en los aparatos basados en el efecto termoeléctrico, que estudiaremos a continuación.

9. Aparatos de efecto termoeléctrico. — En estos aparatos, al contrario de lo que se admitió al estudiar los de hilo dilatable, no solamente el calor q_l perdido en los extremos no es despreciable frente al q_2 perdido por convección y radiación en la superficie del hilo, sino que en algunos casos q_2 puede ser despreciable frente a q_l. De modo que hay que tener en cuenta a q_l y por lo tanto estudiar la distribución de la temperatura de equilibrio a lo largo del hilo calefactor, que suponemos fijo en piezas

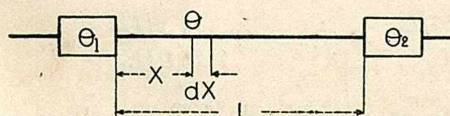


Fig. 10

terminales cuyos calentamientos respecto a la temperatura ambiente son Θ_1 y Θ_2 respectivamente (fig. 10). Para simplificar, admitiremos que el hilo, recorrido por una corriente continua constante I, está calentado *uniformemente*, es decir, que la resistencia es prácticamente independiente de la temperatura, y que todos los puntos de una sección transversal del conductor están a la misma temperatura. Sea L la longitud del hilo. Expresemos que la diferencia entre los calores transmitidos por dos secciones rectas del conductor que limitan una porción dx, iguala a la suma del calor producido en esa sección y del calor evacuado por convección y radiación; suponiendo siempre válida la ley de *Newton* se tiene:

$$ks \frac{d^2\Theta}{dx^2} = - r\, I^2 + a\,\Theta \qquad (39)$$

donde s es la sección transversal del conductor y k su conductividad térmica.

Pongamos

$$\frac{r\, I^2}{a} = \Theta' \qquad (40)$$

y

$$\frac{ks}{a} = L_o^{\,2} \qquad (41)$$

Θ' es el calentamiento que se obtendría si el calor desprendido en los extremos fuese despreciable y L_o es la longitud de un conductor que disiparía por convección y radiación, por grado de elevación uniforme de la temperatura sobre la ambiente, la misma cantidad de calor que transmitiría por su sección transversal con un gradiente de temperatura longitudinal constante de 1°C por L_o.

La integración de (39) da, teniendo en cuenta (40) y (41)

$$\Theta - \Theta' = A\, ch \frac{x + B}{L_o}$$

donde las constantes de integración A y B se determinan por las condiciones límites: $x = 0$, $\Theta = \Theta_1$; $x = L$, $\Theta = \Theta_2$. Se obtiene

$$\Theta - \Theta' = (\Theta_1 - \Theta') \frac{sh\, (L - x)/L_o}{sh\, L/L_o} + (\Theta_2 - \Theta') \frac{sh\, x/L_o}{sh\, L/L_o} \qquad (42)$$

El valor de Θ más interesante es, en general, el Θ_c en el centro del hilo calentado; haciendo en (42) $x = L/2$ se obtiene

$$\Theta_c - \Theta_m = (\Theta' - \Theta_m)\left(1 - \frac{1}{ch\, L/2L_o}\right) =$$

$$= \frac{R^2 I^2}{8 k \varrho} \; \frac{2\left(1 - \dfrac{1}{ch\, L/2L_o}\right)}{(L/2L_o)^2} - \Theta_m\left(1 - \frac{1}{ch\, L/2L_o}\right) \qquad (43)$$

donde $\Theta_m = \dfrac{\Theta_1 + \Theta_2}{2}$ es el calentamiento medio de las piezas terminales, $R = r_1 L$ es la resistencia total del hilo calefactor y ϱ es la resistividad del hilo.

La relación (43) toma una forma particularmente interesante cuando L/L_o es muy pequeño; se dice entonces que el conductor es "térmicamente corto" y se tiene

$$\Theta_c - \Theta_m \cong \frac{r I^2}{8 k \varrho} \qquad (44)$$

En estas condiciones, y si $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_m$, basta, para medir I, disponer un par termoeléctrico como lo indica la fig. 11; suponiendo que la cantidad de calor evacuada por el par es despreciable, la diferencia de temperatura que produce la fuerza termoeléctrica es precisamente $\Theta_c - \Theta_m$, que, de acuerdo con la relación (44), es proporcional a I^2. Obsérvese que por lo menos una de las soldaduras del par debe estar eléctricamente aislada del circuito recorrido por la corriente a medir, aunque en contacto térmico. Si la fuerza termoeléctrica es proporcional a la diferencia de temperaturas que la origina, la desviación de un galvanómetro de cuadro móvil conectado entre a y b (fig. 11) será proporcional al cuadrado de la corriente a medir I.

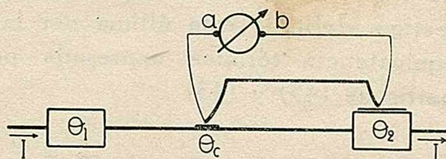


Fig. 11

Nótese que, a igualdad de dispositivo calefactor y de I, $\Theta_c - \Theta_m$ es lo mayor posible cuando $L \ll L_o$, porque el mayor valor del término $2\left(1 - \dfrac{1}{ch\, L/2L_o}\right) / (L/2L_o)^2$ es 1, para L/L_o igual a cero. Hay pues interés, para aumentar la sensibilidad, en reducir L/L_o, o sea a. A tal efecto se dispone en el vacío el conjunto elemento calefactor-par termoeléctrico (*Voege*), lo que práctica-

mente elimina las pérdidas por convección. Pero hay que observar que la sensibilidad puede variar con el tiempo, porque el vacío es susceptible de alterarse.

Si el conductor no es suficientemente corto térmicamente, el segundo término del miembro derecho de la ecuación (43) no es despreciable, y para medir I^2 es necesario compensar el aparato.

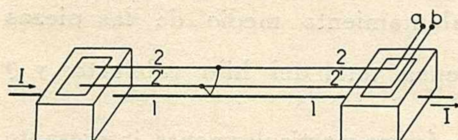


Fig. 12

A tal efecto (fig. 12), además del hilo calentado 11, se disponen dos hilos testigo idénticos, 22 y 2' 2', aislados eléctricamente de los soportes extremos, pero en contacto térmico con ellos (*Goodwin*). La temperatura Θ_{tc} de los centros de los hilos testigo está dada por la relación (43) en la que se hace $I = 0$, o sea por

$$\Theta_{tc} - \Theta_m = - \Theta_m \left(1 - \frac{1}{ch\, L'/2L'_o} \right) \qquad (45)$$

donde L' y L'_o son las longitudes real y ficticia de los hilos testigo, definida esta última por la relación (41). Si se realiza la equivalencia térmica expresada por $L/L_o = L'/L'_o$, se obtiene, a partir de (45) y (43)

$$\Theta_c - \Theta_{tc} = \frac{R^2\, I^2}{8\, k\, \varrho} \; \frac{2\left(1 - \dfrac{1}{ch\, L/2L_o}\right)}{(L/2L_o)^2} \qquad (46)$$

El par dispuesto como se ve en la fig. 12 mide $\Theta_c - \Theta_{tc}$: la diferencia de temperatura que produce la fuerza termoeléctrica es proporcional a I^2, independientemente de los valores que pueden tener Θ_1 y Θ_2, y en particular de su igualdad.

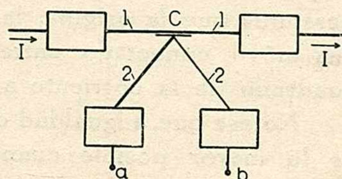


Fig. 13

En realidad el calentamiento del centro del hilo está afectado por la presencia del par, porque en el punto de contacto hay una evacuación de calor. Por ejemplo, con el dispositivo de la fig. 13, donde 1 1 es el hilo calefactor y 2 2 el par, si las ramas son térmicamente equivalentes y los cuatro bornes terminales están a la temperatu-

ra ambiente, se demuestra que el calentamiento del centro C es la mitad del que se obtendría en ausencia del par 2 2.

En general la soldadura caliente, en C (fig. 13), está aislada eléctricamente, aunque en contacto térmico con el hilo calefactor, que es homogéneo; el aparato recibe el nombre de termopar.

A veces se yuxtaponen en cruz los dos hilos y se sueldan en el centro (en C, fig. 14) para asegurar el contacto eléctrico necesario; el elemento calefactor es aquí heterogéneo, formado por dos elementos (hierro-constantano, plata-constantano) cuyas constantes son respectivamente L' y L'', a' y a'', k' y k'', r' y r'', L'_o y L''_o. Tal aparato recibe el nombre de termocruz; el estudio que da $\Theta_c - \Theta_m$ es algo más complejo; en particular, *Goodwin* demostró que si se desprecia el calor evacuado por los hilos no recorridos por la corriente a medir, si $L'/L'_o = L''/L''_o = L/l_o$ y si $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_m$, se tiene

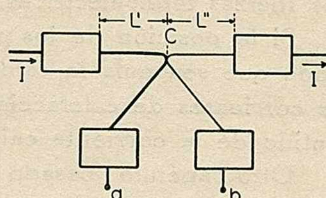


Fig. 14

$$\Theta_c - \Theta_m = \left\{ \left[\frac{L' r' + L'' r''}{L' a' + L'' a''} \right] I^2 - \Theta_m \right\} \left(1 - \frac{1}{ch\, L/L_o} \right) \quad (47)$$

La calibración de termocruces (o de termopares con contacto eléctrico) en corriente continua no vale en corriente alterna, porque parte de la corriente a medir se deriva a través del contacto, que nunca es puntual, y, si es continua, hace desviar el galvanómetro. En alta frecuencia hay que tener en cuenta las capacidades y la self-inducción de los hilos, así como el efecto pelicular en los mismos; la calibración, tanto para termopares como para termocruces, se modifica.

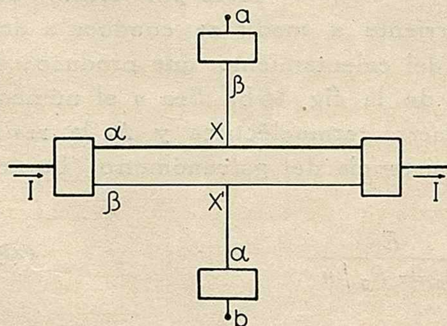


Fig. 15

La sensibilidad de los aparatos basados en el efecto termoeléctrico crece con r, pero no se puede reducir demasiado la sección del hilo porque se arriesga que una corriente alterna de amplitud constante produzca una fuerza termoeléctrica ondulada.

Otro sistema es el de la fig. 15, donde hay dos hilos calefactores en paralelo, de materiales diversos, α y β. En X y X', cerca del centro de los hilos, se sueldan otros dos hilos que van a los bornes donde se conecta el galvanómetro; el hilo unido al calefactor de material α es de material β y viceversa; se obtienen así dos fuerzas termoeléctricas en serie en el circuito del galvanómetro.

Si la posición de los puntos de soldadura X y X' se regula de modo que sea nula la caída de tensión que entre ellos producen las corrientes de calefacción, la calibración es independiente del sentido de la corriente calefactora.

Otro aparato basado en el efecto termoeléctrico (*Wertheim-Salomonson, Schering*) consiste en cierta cantidad de pares conectados de modo que formen un puente de Wheatstone de ramas teóricamente iguales; r es una resistencia que equilibra el puente (fig. 16a). Los pares son de manganino y constantano, elección que ofrece la ventaja de evitar prácticamente toda variación de resistencia de los elementos calefactores por efecto del pasaje de la corriente. La corriente a medir se conduce a dos vértices del puente, y a causa del calentamiento que produce, el dispositivo equivale al circuito de la fig. 16 b. Sea n el número de pares en cada rama, E la fuerza termoeléctrica y R_p la resistencia de cada par, y R_g la resistencia del galvanómetro. La corriente en este último es

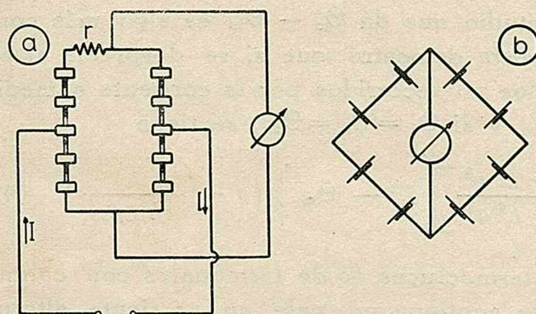


Fig. 16

$$i_g = \frac{E}{R_p + R_g / n} \tag{48}$$

en vez de

$$i_g = \frac{E}{R_p + R_g} \tag{49}$$

que se obtendría con un solo par, como el de la fig. 13. Hay aumento de sensibilidad únicamente si $n > 1$, y este aumento sólo es notable si $R_g >> R_p$.

Se construyen también (*Campbell*) termo-pares diferenciales que permiten medir directamente la diferencia de los cuadrados de los valores eficaces de dos corrientes I_1 e I_2, cuya igualdad se quiere verificar. A este efecto se disponen dos elementos calefactores, recorridos respectivamente por estas corrientes, cada uno de los cuales calienta una de las soldaduras de cierto número de pares dispuestos en serie (fig. 17).

La sensibilidad que se obtiene con termopares es netamente superior a la que permiten los aparatos de hilo dilatable, a causa de que el termopar trabaja con un galvanómetro de corriente continua de cuadro móvil, que puede ser muy sensible; así se compensa hasta cierto punto la circunstancia desfavorable de ser la desviación proporcional al cuadrado de la corriente. Por supuesto, la sensibilidad del conjunto depende no sólo de la sensibilidad en intensidad del galvanómetro de cuadro móvil, S_i, sino de su resistencia interior; en efecto, con un termopar simple la desviación es

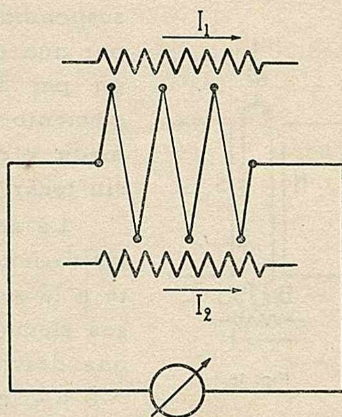


Fig. 17

$$\Theta = S_t\, E = \frac{E}{R_p} \; \frac{S_i}{1 + \frac{R_g}{R_p}} \qquad (50)$$

donde la fuerza termoeléctrica E es, en primera aproximación, proporcional al cuadrado de la corriente medida. Se ve que entre varios galvanómetros, hay interés en elegir aquel en que $\frac{S_i}{1 + \frac{R_g}{R_p}}$ sea máximo, siempre que el período ideal y el grado de amortiguamiento del aparato cerrado sobre el par sean convenientes.

Observemos que, en rigor, el nombre de galvanómetro térmico dado al conjunto termopar — galvanómetro de corriente continua es bastante impropio, salvo tal vez en el caso del galvanómetro de *Duddell*, que describiremos en el parágrafo siguiente.

En realidad el termopar no es otra cosa que un transformador-rectificador de tipo particular, porque suministra una corriente

continua prácticamente constante cuando se lo alimenta con una corriente alterna de amplitud constante, mientras que en las mismas condiciones un rectificador mecánico, o de otro tipo, daría una corriente ondulada.

10. Galvanómetro de Duddell. — El principio del aparato es el del termopar, pero el par está íntimamente ligado al galvanómetro, ya que forma parte del cuadro de este último. El cuadro, suspendido de un hilo de cuarzo, está formado por una espira única, de plata, terminada por un par bismuto - antimonio calentado por un elemento resistente recorrido por la corriente a medir y colocado muy cerca del par, aunque sin tocarlo (fig. 18).

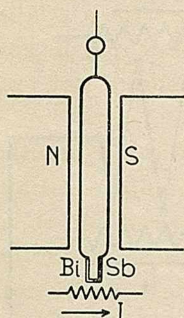


Fig. 18

La sensibilidad del aparato se puede regular variando la distancia del elemento resistente a la soldadura calentada, y adoptando diversos elementos calefactores; se llega a obtener una desviación de 1 mm con una corriente de $\sim 6\ \mu A$, estando la escala a 1 m de distancia. El período ideal del aparato es de $3 - 4$ s. Se construye en tal forma que el amortiguamiento es próximo al crítico. Hay también modelos de índice mecánico.

11. Sensibilidades prácticas de los electrodinamómetros, galvanómetros de inducción, de hierro dulce y térmicos. — Algunos de los aparatos estudiados en este capítulo son, como hemos visto, particularmente sensibles a las acciones parásitas. Sin embargo en las definiciones de las sensibilidades prácticas se entiende que la desviación se debe únicamente a la corriente o a la tensión a medir, haciendo abstracción de las acciones parásitas; la influencia de estas últimas debe ser especificada aparte.

Se distingue entre dos categorías de aparatos, según que las desviaciones sean proporcionales a la magnitud a medir (intensidad de corriente o diferencia de potencial), o a su cuadrado. En realidad las desviaciones se apartarán más o menos, según el aparato, de las leyes simples mencionadas; si se quiere utilizar el galvanómetro para la medida directa, se debe calibrarlo siempre en toda la escala, en las condiciones de empleo.

1) *Aparatos que dan desviaciones proporcionales a la corriente.* Pertenecen a esta categoría los electrodinamómetros de exci-

tación independiente y los aparatos de hierro dulce en los que el par director se debe a un campo síncrono de la corriente a medir; sólo nos ocuparemos de los primeros.

Las definiciones de la sensibilidad práctica en intensidad en corriente continua son las dadas en el capítulo IV, 6, debiéndose especificar el valor de la corriente de excitación. En corriente alterna sinusoidal se reemplazan en dichas definiciones los valores de las corrientes continuas por los valores eficaces de las corrientes alternas; se entiende que la sensibilidad práctica se refiere a la intensidad ficticia y que se cumplen las condiciones para que la sensibilidad práctica en intensidad ficticia sea una constante del aparato (ver el parágrafo 1).

Del mismo modo, las definiciones de la sensibilidad práctica en tensión y en volt (o por microvolt) en corriente continua son las dadas en el capítulo IV, 9, debiéndose especificar el valor de la corriente de excitación. En corriente alterna sinusoidal se reemplaza en dichas definiciones el valor de la tensión continua por el valor eficaz de la tensión alterna y se especifica el valor eficaz de la corriente de excitación. Si la tensión está aplicada directamente en los bornes del aparato, se tiene, por supuesto,

$$S_V = S_A Z_g \quad \text{o} \quad S_{\mu V^{-1}} = \frac{S_{\mu A^{-1}}}{Z_g} \qquad (51)$$

en vez de

$$S_V = S_A R_g \quad \text{o} \quad S_{\mu V^{-1}} = \frac{S_{\mu A^{-1}}}{R_g} \qquad (52)$$

que se cumplían en corriente continua

Las sensibilidades en volt y por microvolt se pueden también definir aplicando la d.d.p. por intermedio de una resistencia elegida en tal forma que el aparato se encuentra en condiciones de amortiguamiento crítico; se supone despreciable la self-inducción del circuito de la bobina móvil. Las relaciones son entonces las mismas que en corriente continua, o sea

$$S_V = S_A R_c \quad \text{o} \quad S_{\mu V^{-1}} = \frac{S_{\mu A^{-1}}}{R_c} \qquad (53)$$

2) *Aparatos que dan desviaciones proporcionales al cuadrado de la corriente.* Los aparatos que entran en esta categoría se subdividen en dos grupos; el primero comprende los electrodinamómetros con auto-excitación, los galvanómetros de hierro dulce

con par director elástico o debido a un campo magnético constante y los aparatos de efecto termoeléctrico sin galvanómetro independiente de corriente continua; el segundo comprende los aparatos basados en el efecto termoeléctrico que exigen un galvanómetro independiente de corriente continua.

Consideremos el primer grupo. Si el aparato es de índice de longitud constante se indica en corriente continua el valor de la corriente o tensión, y en corriente alterna sinusoidal el valor eficaz de la corriente o tensión, que produce la desviación de toda la escala. En los aparatos de espejo y escala separada las definiciones son las mismas que en la categoría 1), salvo que en la definición de la sensibilidad práctica en ampere o en volt se indica a veces, no la corriente o tensión que produce una desviación de 1 mm, sino la que produce una desviación de 10 mm, o de 250 mm. Si $S_A{}^1$ designa la sensibilidad práctica en ampere relativa a la desviación de 1 mm y $S_A{}^d$ la relativa a la desviación de d mm, se tiene

$$S_A{}^d = S_A{}^1 \sqrt{d} \qquad (54)$$

donde d está en milímetros.

La sensibilidad práctica por microampere, $S_{\mu A^{-1}}$, se calcula a partir de $S_A{}^d$ por

$$S_{\mu A^{-1}} = \frac{d\,10^{-12}}{(S_A{}^d)^2} \qquad (55)$$

donde d está en milímetros.

Notemos al pasar que conociendo $(S_A)_{e.i.}$, sensibilidad práctica en ampere (se subentiende, en intensidad ficticia) de un electrodinamómetro con excitación independiente I_1, se calcula inmediatamente $(S_A{}^d)_{a.e.}$, sensibilidad práctica en ampere del mismo aparato con autoexcitación. Se tiene en efecto

$$(S_A{}^d)_{a.e.} = \sqrt{(S_A)_{e.i.}\, d\, I_1} \qquad (56)$$

donde d está en milímetros e I_1 en ampere. Introduciendo $(S_{\mu A^{-1}})_{a.e.}$ en vez de $(S_A{}^d)_{a.e.}$ y $(S_{\mu A^{-1}})_{e.i.}$ en vez de $(S_A)_{e.i.}$ la relación (56) se transforma en

$$(S_{\mu A^{-1}})_{a.e.} = (S_{\mu A^{-1}})_{e.i.} \frac{1}{I_1} \qquad (57)$$

con I_1 en microampere.

Consideremos ahora el segundo grupo. Se caracteriza la sensibilidad práctica de estos aparatos por la fuerza termoeléctrica

E, en milivolt, producida por la mayor corriente *I*, en miliampere, que puede soportar, en forma permanente y sin peligro, el elemento calefactor. La sensibilidad resultante del conjunto formado por un termopar y un galvanómetro de cuadro móvil de corriente continua se determina a partir de la relación (50).

BIBLIOGRAFÍA

Electrodinamómetros y galvanómetros de inducción.

1. **H. Abraham** — *C. R. Acad. Sc.*, t. 142, p. 993, 1906 o *Ind. El.*, t. 15, p. 233, 1906.
2. **A. Gray** — Absolute measurements in electricity and magnetism—Macmillan and Co, London, 1921.
3. **A. Palm** — *Zs. f. Instrkde.*, t. 33, p. 368, 1913.
4. **W. Stroud y J. H. Oates** — *Phil. Mag.*, t. 6, p. 707, 1903.
5. **W. E. Sumpner** — *Journ. Inst. El. Eng.* t. 36, p. 421, 1906 y t. 41, p. 227, 1908; *Phil. Mag.*, t. 20, p. 309, 1910.
6. **W. E. Sumpner y W. C. S. Phillips** — *Proc. Phys. Soc.* t. 22, p. 395, 1908.
7. **A. Täuber-Gretler** — *Bull. S. E. V.*, N.º 12, 1928.
8. **W. Weber** — Werke—Springer, Berlin, 1893,
9. **E. Weibel** — *B. of St. Sc. Pap.* N.º 297, 1917.

Galvanómetros de hierro dulce.

1. **M. Bellati** — *Atti di Torino*, t. 1, p. 563, 1883.
2. **W. S. Franklin y L. A. Freudenberger** — *El. World*, t. 48, p. 718, 1906 o *Phys. Rev*, t. 24, p. 37, 1907.
3. **M. Guinchant** — *C. R. Acad. Sc.*, t. 148, p. 1674, 1909 o *Ind. El.*, t 18, p. 357, 1909.
4. **M. Wien** — *Ann. der Phys.*, t. 4, p 445, 1901.

Galvanómetros térmicos.

1. **A. Campbell y E. C. Childs** — The measurement of inductance, capacitance and frequency—Macmillan and Co, London, 1935.
2. **A. Campbell y D. W. Dye**—*Proc. Roy. Soc.*, p. 621, 1914.
3. **W. B. Duddell** — *Phil. Mag.*, t. 8, p. 91, 1904; *The El.*, t. 56, p. 559, 1906 y t. 61, p. 94, 1908.
4. **W. N. Goodwin Jr.** — *El. Eng.*, t. 55, p. 23, 1936 o *R. G. E.*, t. 41, p. 83, 1937.
5. **W. H. I. Moll** — *Journ. Sc. Instr.*, t. 3, p. 209, 1936.
6. **H. Schering** — *Zs. f. Instrkde.*, t. 32, p. 69 y 101, 1912.
7. **A. Steinert** — *E. T. Z.*, t. 45, p. 365, 1924 o *R. G. E.*, t. 16, p. 776, 1924.
8. **W. Voege** — *E. T. Z.*, t. 27, p. 467, 1906.
9. **J. K. A. Wertheim - Salomonson** — *Phys. Zs.*, t. 7, p. 463, 1906.

CAPÍTULO X.

Estudio crítico de los catálogos. Datos numéricos de los galvanómetros de construcción corriente.

1. Introducción. — En general, los catálogos contienen una descripción más o menos detallada del aparato, fotografías y ciertos datos numéricos; a veces traen también nociones teóricas sobre el funcionamiento. El fabricante se propone con ello facilitar lo más posible la correcta elección del aparato; examinaremos aquí hasta que punto se cumple dicho propósito.

Empecemos por observar que la elección óptima de un aparato no es ni puede ser siempre fácil. Los capítulos precedentes (que deben ser estudiados antes de la elección) sólo suministran una parte de los elementos necesarios; la otra parte depende de las medidas en las cuales el aparato será utilizado. Los métodos de medida están por lo general muy mal discutidos, de modo que el lector debe desconfiar de las recetas gratuitas, que son con frecuencia falsas o válidas sólo en casos particulares. Es casi inútil observar que no siempre hay interés en elegir un aparato muy sensible; la elección de la sensibilidad óptima (no forzosamente máxima), del período ideal y del grado de amortiguamiento del aparato es cuestión de criterio y exige preparación.

Aceptado esto, se deduce que las nociones teóricas están completamente fuera de lugar en los catálogos, porque no pueden

ser tratadas en ellos con la amplitud y el espíritu crítico necesarios, hemos constatado que, tal como se las expone actualmente, inducen a veces a error. En definitiva, las nociones teóricas deben ser suprimidas de los catálogos, que deben contener

1) *datos numéricos,* que dividimos en dos categorías

a) *datos que definen cuantitativamente el comportamiento del aparato en servicio normal.*

Estos conjuntos de valores deben ser completos, aunque no superabundantes ; permiten elegir un galvanómetro dado entre todos los del mismo tipo. Los catálogos tratan esta parte en forma insuficiente: sus datos no son nunca completos y, en general, incluyen elementos inútiles, entendiendo por tales los calculables con extrema sencillez a partir de otros. Esta superabundancia de datos, que parece justificarse por el deseo de evitar al cliente algunos cálculos elementales, es ridícula : la elección de un galvanómetro merece siempre reflexión y cálculos, ya que su precio es generalmente elevado y su campo de aplicacación correcta limitado.

b) *datos que definen cuantitativamente la calidad del aparato.*

Es poco frecuente encontrar en los catálogos datos de esta naturaleza, a pesar de su evidente interés para la elección del aparato con vistas a determinado servicio. Así la fijeza del cero después de desviaciones de duración y amplitud variables, la proporcionalidad de la desviación a la magnitud a medir o a su cuadrado, etc., se omiten casi sistemáticamente; ocurre lo mismo en lo referente a la eficacia de los dispositivos adoptados para combatir los efectos parásitos, como las pantallas magnéticas. Notemos al pasar que los datos de la segunda categoría ponen mejor en evidencia los progresos de construcción que los de la primera.

2) *una parte descriptiva,* con fotografías del conjunto y de los detalles y, si es necesario, instrucciones sobre el manejo y la regulación.

Nunca se dará a esta parte demasiada extensión; nunca serán excesivos los datos sobre los detalles de construcción, sobre el reemplazo y la eventual regulación de los diversos órganos, etc. Conviene indicar siempre el peso y las dimensiones del aparato y de sus partes intercambiables. Desgraciadamente todo esto no está siempre suficientemente desarrollado en los catálogos. La descripción debe estar acompañada de croquis y fotografías : estas últimas figuran en general en número suficiente.

En lo que sigue haremos principalmente un estudio crítico de los datos numéricos de la primera categoría, indicando lo que deberían ser y lo que son; haremos también algunas sugestiones sobre los datos numéricos de la segunda categoría.

Gran número de datos numéricos de la primera categoría es por supuesto común a varios o a todos los tipos de galvanómetros; para cada tipo de aparato estos datos varían entre ciertos límites, como se puede ver en la fig. 1, en la que hemos reunido los valores de $S\mu A^{-1}$, T_o, R_c y R_g de los galvanómetros de construcción corriente. La figura está confeccionada sobre la base de los valores tomados de los cuadros I - X incluídos al final de este capítulo; no pudimos hacer figurar otros datos, por ejemplo α_o, porque desgraciadamente no están indicados en los catálogos.

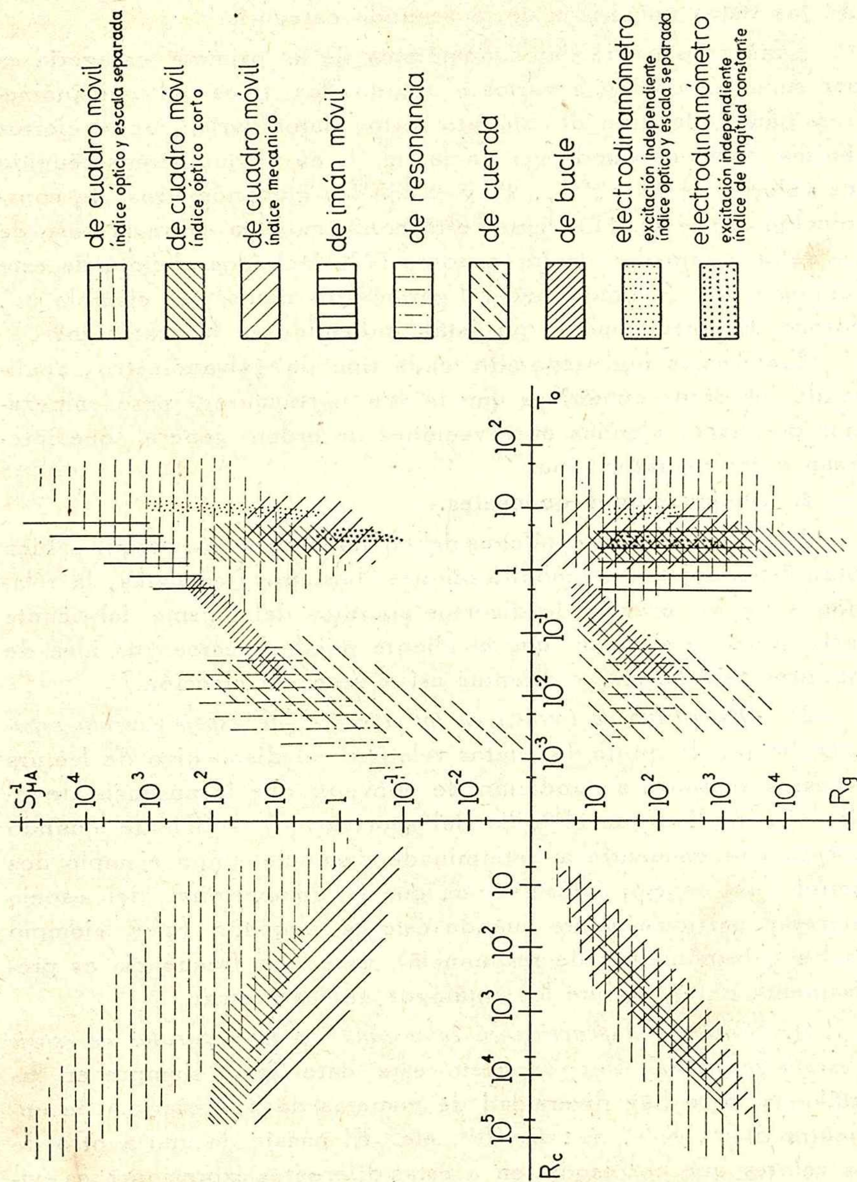
Trataremos por separado cada tipo de galvanómetro, analizando los datos numéricos que le son particulares, pero empezamos por hacer algunas observaciones de orden general que interesan a los distintos tipos.

2. Observaciones generales.

1) *Precios.* Los catálogos deben indicar precios, porque si bien están éstos sujetos a modificaciones bastante frecuentes, la relación entre los precios de diversos aparatos del mismo fabricante varía poco, de modo que el cliente puede hacerse una idea de los precios *relativos*, y orientar así a veces su elección.

2) *Dispositivo de lectura en los aparatos de espejo y escala separada.* Se puede omitir los datos relativos al dispositivo de lectura de estos aparatos, a condición de convenir que la ausencia de indicación implica que el brillo del spot es muy suficiente cuando la escala se encuentra a determinada distancia (por ejemplo dos metros) del espejo. Observemos que las dimensiones del espejo interesan particularmente cuando éste es pequeño (por ejemplo en los galvanómetros de resonancia), pero con frecuencia es precisamente entonces que los catálogos no las indican.

3) *Sensibilidad práctica en intensidad en los aparatos de espejo y escala separada.* Por supuesto este dato figura siempre en los catálogos, pero hay diversidad de maneras de expresarlo. Se encuentra $S\mu A^{-1}$, $S\mu A$, S_A, $S_A . 10^{10}$, etc. El pasaje de uno a otro de los valores que corresponden a estas diferentes expresiones es evidentemente inmediato, pero sería muy útil una uniformización; aquí hemos adoptado $S\mu A^{-1}$: de este modo el valor numérico es



de cuadro móvil
índice óptico y escala separada
de cuadro móvil
índice óptico corto
de cuadro móvil
índice mecanico
de imán móvil
de resonancia
de cuerda
de bucle
electrodinamómetro
excitación independiente
índice optico y escala separada
electrodinamómetro
excitación independiente
índice de longitud constante
$S^{-1}_{\mu A}$
T_o
R_g
R_c

Fig. 1

mayor para el aparato más sensible. Se podría desde luego acordar la adopción de S_A, que indicamos en general en el texto de los capítulos precedentes; el valor numérico de S_A es por el contrario menor para el aparato más sensible. Recordemos que en los aparatos de desviación proporcional a la corriente

$$S_{\mu A^{-1}} = \frac{10^{-6}}{S_A}$$

La misma falta de uniformidad se encuentra en lo que se refiere a las sensibilidades prácticas en tensión y en cantidad de electricidad.

4) *Período ideal.* A veces los catálogos indican el "período" sin especificar si se trata del período ideal T_0 o del período en circuito abierto T_∞; tales valores van acompañados de un signo de interrogación en los cuadros incluídos al final de este capítulo. En algunos casos se indica T_∞, pero no se da α_0.

Cuando se trata de un balístico, se dan a veces el tiempo t_1 que emplea el aparato, en condiciones de amortiguamiento crítico, en alcanzar la elongación partiendo del cero, y (!) el tiempo t_r de retorno al cero, pero se omite en este último caso la relación $n = \frac{d_{max}}{d_{min}}$ de la elongación a la mínima desviación apreciable y no se especifica si t_r se cuenta a partir del instante de la descarga o del de la elongación. Ahora bien, para $\alpha = 1$, tanto t_1 como t_r (que también depende de n) se calculan a partir de T_0 (ver el capítulo I, 8 y 10) de modo que no hay ninguna ventaja en indicar t_1 o t_r (y n) en lugar de T_0. Se debería uniformizar; la indicación de T_0 nos parece la más correcta, aún cuando — ya que α_0 debe ser indicado — puede sustituirse por T_∞. Recordemos que $T_0 = T_\infty \sqrt{1 - \alpha_0{}^2}$: T_0 y T_∞ sólo se confunden prácticamente si $\alpha_0 < \sim 0,15$.

5) *Precisión.* Es necesario indicar la precisión con que se garantiza cada uno de los datos de primera categoría. Algunos catálogos indican esta precisión; es de desear que tal proceder se generalice.

3. Galvanómetros de cuadro móvil, de índice óptico y escala separada.

A. Datos requeridos.

Los datos indispensables para poder caracterizar el funcionamiento de un aparato de construcción corriente en diversos circuitos, son

1) *resistencia interior* R_g *y resistencia auxiliar* r_g, dispuesta en serie con el sistema móvil, en los aparatos que la contienen

2) *resistencia crítica,* R_c, o, en los aparatos con shunt magnético, los límites de su variación

3) *período ideal,* T_o, o, si el valor de T_o es afectado por la posición del shunt magnético, los límites de su variación

4) *sensibilidad práctica en intensidad,* por ejemplo $S\mu A^{-1}$, o, en los aparatos con shunt magnético, los límites de su variación

5) *grado de amortiguamiento en circuito abierto,* α_o, o, si el valor de α_o es afectado por la posición del shunt magnético, los límites de su variación.

Además es necesario indicar

6) *mayor corriente admisible,* $I_{m.a.}$: es la mayor corriente constante que puede atravesar el aparato durante 0,1 de segundo sin riesgo de deteriorarlo.

Repitamos que debe conocerse la precisión con que se garantiza cada uno de los valores precedentes.

En aparatos con cuadros de dos arrollamientos y en los de cuadros o sistemas intercambiables deben conocerse los datos *A1* — *A6* relativos a cada cuadro o sistema.

En casos particulares puede ser útil conocer datos (las dimensiones del cuadro etc.) que no se utilizan normalmente; se puede admitir que estos datos sólo se suministren a pedido.

Conociendo *A1* —*A5* se calcula inmediatamente

7) *sensibilidad práctica por microvolt,* $S\mu V^{-1}$

$$S\mu V^{-1} = \frac{S\mu A^{-1}}{R_g} \quad \text{o} \quad S\mu V^{-1} = \frac{S\mu A^{-1}}{R_c}$$

según la definición

8) *sensibilidad práctica por microcoulomb,* $S\mu C^{-1}$

$$S\mu C^{-1} = S\mu A^{-1} \frac{2\pi}{T_o} f$$

donde

$$f = e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}}$$

En particular $f = 1$ para $\alpha = 0$ y $f = 1/e = 0{,}37$ para $\alpha = 1$.

El conocimiento de la sensibilidad práctica en cantidad de electricidad en circuito abierto, $S\mu C^{-1}{}_o$, permite determinar con aproximación muy suficiente el valor $S\mu C^{-1}$ de la sensibilidad prác-

tica en cantidad de electricidad en un circuito de resistencia total R cualquiera, aplicando la relación

$$S\mu c^{-1} = S\mu c^{-1}{}_{0} \frac{R}{R + m R_c}$$

donde $m = e^{1 - \frac{\lambda_o}{\pi} arctg \frac{\pi}{\lambda_o}} - 1$; si $\alpha_o << 1$ se hará $m = 1{,}72$.

9) *sensibilidad normal o factor de mérito*; esta noción no presenta interés alguno (ver el capítulo **IV, 11**).

10) *grado de amortiguamiento en circuito cerrado, de resistencia total R*

$$\alpha = \alpha_o + (1 - \alpha_o) \frac{R_c}{R}$$

B. Datos de los catálogos y su crítica. Conclusiones.

Examinemos sucesivamente los diversos datos.

1) *Resistencia interior*, R_g, con la especificación de la resistencia adicional cuando ésta forma parte del aparato: nada que señalar.

2) *resistencia critica*, R_c: en general los catálogos indican la resistencia crítica exterior $R_{ce} = R_c - R_g$; creemos más útil adoptar R_c que interviene directamente en las fórmulas.

Para los aparatos con shunt magnético, ciertos catálogos dan una serie de valores límites e intermedios de R_c y de los valores de $S\mu A^{-1}$ correspondientes; como ya indicamos (ver el capítulo **IV, 11**) tal serie es inútil puesto que se deduce de la relación

$$S\mu A^{-1} = Cte.\ R_c^{1/2}$$

Interesa conocer los valores límites y a lo sumo uno intermedio. Observación análoga se puede formular para los aparatos con shunt magnético cuyo par director depende de la posición del shunt; se tiene entonces (ver el capítulo **IV, 11**)

$$S\mu A^{-1} = Cte.\ R_c^{1/2}\ T_o^{3/2}$$

3) *período ideal*, T_o: nada que señalar (fuera de la observación formulada en el parágrafo 2).

4) *sensibilidad práctica en intensidad*, $S\mu A^{-1}$; nada que señalar (fuera de la observación formulada en el parágrafo 2).

5) *grado de amortiguamiento en circuito abierto*, α_o : no obstante su importancia, es sistemáticamente omitido en los catálogos. Se observará que frecuentemente α_o no es despreciable frente a la unidad.

6) *mayor corriente admisible*, $I_{m.a.}$: no figura nunca en los catálogos a pesar de su interés en ciertos casos porque permite fijar las precauciones en el empleo del aparato.

7) *sensibilidad práctica por microvolt*, $S\mu V^{-1}$: está generalmente indicada. Tal indicación es completamente inútil puesto que $S\mu V^{-1}$ se calcula a partir de $S\mu A^{-1}$ y R_c o R_g . Conviene notar que no existe acuerdo sobre su definición, eligiéndose unas veces R_c , otras R_g , como resistencia del circuito en que actúa la d.d.p.

Creemos que esta magnitud debe suprimirse de los catálogos.

8) *sensibilidad práctica por microcoulomb*, $S\mu C^{-1}$: está frecuentemente indicada; no hay uniformidad en su definición; ciertos catálogos indican su valor para $\alpha = 0$, otros para $\alpha = \alpha_o$ (¡omitiendo el valor de α_o !), otros finalmente para $\alpha = 1$. Creemos que esta magnitud, calculable mediante $S\mu A^{-1}$, T_o , R_c y α_o , debe suprimirse.

9) *sensibilidad normal o factor de mérito*. Esta magnitud felizmente no se indica en los catálogos; hemos mostrado su inutilidad en el capítulo IV, 11

Conclusiones. Creemos que en virtud de su extendido empleo el galvanómetro de cuadro móvil debe ser objeto de una normalización internacional, hoy inexistente. Dicha normalización debería prescribir la indicación obligatoria de los datos de primera categoría enumerados en *A1* — *A6* y la supresión de otros, de acuerdo con la discusión que precede. Cada dato estaría acompañado de la precisión con que se lo garantiza.

También debería incluirse datos de segunda categoría. A título de sugestión proponemos se indique la fijeza del cero y de las desviaciones en el siguienie ciclo de la corriente en el aparato: 0, $0{,}5\ I_m$, I_m , $0{,}5\ I_m$, 0, $-0{,}5\ I_m$, $-I_m$, $-0{,}5\ I_m$, 0, donde I_m es la corriente que provoca la mayor desviación del spot, primitivamente en el centro de la escala; cada una de las corrientes del ciclo debe mantenerse constante durante un tiempo t a fijar (igual por ejemplo a 2 segundos). Sean $d_o = 0$, d_1 , d_2 , d'_1 , d'_o , d''_1 , d''_2 , d'''_1 y d'''_o los valores absolutos de las desviaciones respectivas; la calidad del aparato se definirá por $\triangle d_o$ igual al mayor de los

valores d'_o y d'''_o, por Δd_1, igual a la mayor de las diferencias $(d_1 - d'_1)$ y $(d''_1 - d'''_1)$ y por $(d_2 - d''_2)$, teniendo en este último caso gran cuidado de eliminar toda diferencia entre d_2 y d''_2 debida a una insuficiente regulación del despositivo de lectura. Se indicará además la mayor de las diferencias $(2 d_1 - d_2)$ y $(2d''_1 - d''_2)$ después de efectuada la corrección del arco tangente.

Como otra sugestión mencionemos la indicación de las variaciones ΔT_o de T_o y $\Delta \alpha_o$ de α_o cuando se desplaza el shunt magnético entre las posiciones extremas en los aparatos en los cuales teóricamente tal desplazamiento no debería afectar las citadas magnitudes; en los aparatos sin shunt magnético se podría agregar uno provisoriamente, fijando sus dimensiones, su material y el lugar de aplicación, según el imán del aparato.

C. Datos numéricos.

Hemos reunido en el cuadro I (ver al final del capítulo) los dotos numéricos de los aparatos de construcción corriente de diversos fabricantes, recalculándolos en lo necesario. Véase también la fig. 1.

4. Galvanómetros de cuadro móvil de índice mecánico o de índice óptico corto, de longitud invariable.

A. Datos requeridos.

Estos datos sólo difieren de los enumerados en $A1 - A6$ del parágrafo 3, en los siguientes puntos:

a) en ciertos aparatos la variación del grado de amortiguamiento con la resistencia del circuito de medida es pequeña; en tal caso la posición $A2$ del parágrafo 3 puede ser modificada, indicándose $\alpha_{c/c}$, grado de amortiguamiento en corto-circuito, en vez de R_c;

b) la sensibilidad práctica en intensidad (posición $A4$ del parágrafo 3) sa expresa por la intensidad de la corriente que provoca la desviación de una *división*, no forzosamente igual a un milímetro, o también por la intensidad de la corriente que provoca la desviación de toda la escala. Sin embargo, para uniformizar, y por analogía con los galvanómetros de cuadro móvil de índice óptico y escala separada, hemos adoptado para definir la sensibilidad práctica en intensidad, el número de *divisiones* de la escala que corresponde a $1 \mu A$;

c) deben agregarse las siguientes posiciones

7) *número de divisiones y la posición del cero* (lateral o en el centro)

8) *longitud de la escala* o *valor en milímetros de una división*

9) *ángulo correspondiente a la desviación total* o *la longitud del índice.*

B. Datos de los catálogos y su crítica. Conclusiones.

1) *resistencia interior* R_g : nada que señalar

2) *resistencia crítica* R_c, *o grado de amortiguamiento en corto circuito,* $\alpha_{c/c}$: la resistencia crítica, o más bien la resistencia crítica exterior, es a veces indicada; $\alpha_{c/c}$ no lo es nunca.

3) *período ideal,* T_0 : nada que señalar

4) *sensibilidad práctica en intensidad*: nada que señalar fuera de la falta de uniformidad en la definición

5) *grado de amortiguamiento en circuito abierto,* α_0 : no se indica nunca

6) *mayor corriente admisible,* $I_{m.a.}$: no se indica nunca

7) *número de divisiones y posición del cero:* nada que señalar

8) *longitud de la escala* o *valor en milímetros de una división:* no se indica siempre

9) *ángulo correspondiente a la desviación total* o *longitud del índice:* se indica pocas veces

10) *sensibilidad práctica en volt o por microvolt:* se indica a veces; debe suprimirse por ser calculable a partir de la sensibilidad práctica en intensidad y de R_g o de R_c

11) *sensibilidad práctica en coulomb o por microcoulomb:* se indica a veces; debe suprimirse por ser calculable mediante $S_{\mu A^{-1}}$, T_0, α_0 y R_c o $\alpha_{c/c}$.

Conclusiones. De los datos de la primera categoría, se deben indicar R_g, R_c o $\alpha_{c/c}$, T_0, $S_{\mu A^{-1}}$, α_0, $I_{m.a.}$ y la precisión con que se los garantiza, el número de divisiones y la posición del cero, la longitud de la escala y la del índice.

Los datos de segunda categoría, pueden suministrarse sólo a previo pedido, puesto que los aparatos tratados en este parágrafo se utilizan por lo general en métodos de cero, o para medidas groseras.

C. Datos numéricos.

Ver los cuadros II y III y la fig. 1 ($S_{\mu A^{-1}}$ en div/μA).

5. Galvanómetros de imán móvil.

A. Datos requeridos.

En principio son necesarios los mismos datos $A1 - A6$ que para los galvanómetros de cuadro móvil de índice óptico y escala separada, con las siguientes diferencias

a) el grado de amortiguamiento electromagnético es en general muy pequeño frente a α_o, lo que se traduce por la relación $R_c << R_g$: la resistencia crítica no tiene entonces sentido físico, de modo que en la posición $A2$ del parágrafo 3 se puede reemplazar R_c por $\alpha_{c/c}$;

b) la corriente límite $I_{m.a.}$ admisible sin riesgo de deterioración está aquí determinada por consideraciones de índole magnética y no térmica como en los aparatos de cuadro. Por consiguiente se definirá $I_{m.a.}$ como la mayor corriente inicial de descarga en el aparato y no como una corriente constante que puede atravesar el galvanómetro durante $0,1$ *s*.

B. Datos de los catálogos y su crítica. Conclusiones.

1) *resistencia interior* R_g: con frecuencia el aparato tiene varias (dos o cuatro) bobinas, que pueden ser acopladas de distintas maneras. Ciertos catálogos indican los valores de R_g para diversos acoplamientos lo que es por supuesto superfluo. Basta indicar un solo valor, siempre para el mismo acoplamiento: proponemos que se adopte el acoplamiento serie, aunque podría también adoptarse el paralelo.

Si el aparato posee bobinas intercambiables, se indicará por supuesto R_g para cada juego de bobinas.

2) *resistencia crítica,* R_c, *o grado de amortiguamiento en cortocircuito,* $\alpha_{c/c}$: nunca se indica.

3) *período ideal,* T_o. El período ideal, como la sensibilidad, puede regularse por imanes directores. Basta indicar los valores extremos de T_o y $S\mu A^{-1}$; no se darán los valores intermedios en vista de la relación $S\mu A^{-1} = Cte.\ T_o{}^2$, válida a igualdad de las bobinas y de su acoplamiento.

4) *sensibilidad práctica en intensidad.* Ciertos catálogos indican, para aparatos que tienen varias bobinas, los valores de la sensibilidad relativos a diversos acoplamientos; tal proceder es inútil dado que, a igualdad de la posición del imán director, se tiene $S\mu A^{-1} = Cte \sqrt{R_g}$ (ver el capítulo IV, 10); basta pues in-

dicar $S\mu A^{-1}$ para un solo acoplamiento: nosotros hemos elegido el acoplamiento serie.

Cuando el aparato posee bobinas intercambiables, la relación $S\mu A^{-1} = Cte\sqrt{aR_g}$ a T_o dado, sólo permite deducir la variación de $S\mu A^{-1}$ con R_g si se conocen los valores de a en función de R_g; recordemos que a es la relación a la sección transversal de la bobina, de su parte ocupada por el conductor. Sin embargo a menudo las relaciones $S\mu A^{-1} = Cte\, R_g^{1/2}$ o $S\mu A^{-1} = Cte\, R_g^{2/5}$ dan resultados suficientemente exactos en primera aproximación: basta entonces indicar un solo par de valores de $S\mu A^{-1}$ y R_g y la relación correspondiente; en caso contrario se indicarán los valores de $S\mu A^{-1}$ relativos a todos los valores de R_g. Desde luego suponemos el acoplamiento serie para todos los juegos de bobinas.

5) *grado de amortiguamiento en circuito abierto,* α_o: no se indica nunca

6) *mayor corriente de descarga admisible,* I_{ma}: no se indica nunca

7) *sensibilidad práctica por microvolt o en volt.* Generalmente se indica, pero debe suprimirse por ser calculable a partir de $S\mu A^{-1}$ y de R_g

8) *sensibilidad práctica por microcoulomb o en coulomb.* Debe suprimirse por ser calculable a partir de $S\mu A^{-1}$, T_o, α_o y $\alpha_{c/c}$

9) *sensibilidad normal o factor de mérito.* Debe suprimirse (ver el capítulo **IV, 11**).

Conclusiones. De los datos de la primera categoría, los catálogos deben indicar los siguientes valores, siempre relativos a un acoplamiento determinado de las bobinas: R_g, $\alpha_{c/c}$, α_o, $I_{m.a}$ y los valores límites de T_o y $S\mu A^{-1}$; para cada juego de bobinas deben darse los valores de R_g, $\alpha_{c/c}$, $I_{m.a.}$ y, a menos de indicar la ley de la variación de $S\mu A^{-1}$ con R_g, los de $S\mu A^{-1}$. Se indicará la precisión con que se garantiza cada dato.

En los datos de la segunda categoría vale la sugestión sobre la fijeza del cero y de las desviaciones formulada para el galvanómetro de cuadro móvil de indice óptico y escala separada (ver el parágrafo 3, B, conclusiones); además sería interesante conocer por números la eficacidad de las pantallas magnéticas y de las suspensiones astáticas.

C. Datos númericos.

Ver el cuadro IV y la fig. 1.

6. Galvanómetro de resonancia.

A. Datos requeridos.

El aparato está construído de modo que su frecuencia ideal puede ser regulada a un valor cualquiera comprendido dentro de una zona Δf de frecuencias, más o menos estrecha y que debe siempre ser indicada.

Si la sona es estrecha, vale decir si el galvanómetro está construído para una sola frecuencia y el intervalo de regulación sólo sirve para corregir las variaciones de la frecuencia de la fuente y para adaptar el aparato a los circuitos de características diversas, el funcionamiento del aparato en corriente de frecuencia f y forma de onda dadas está definido cuando se conocen

1) *frecuencia ideal* f_o relativa a la regulación considerada

2) *resistencia interior,* R_g

3) *coeficiente de self-inducción interior,* L_g

4) *sensibilidad práctica máxima en intensidad en corriente sinusoidal de frecuencia* f_o, $S\mu A_{max}^{-1}$

5) *grado de amortiguamiento en circuito abierto,* α_o

6) *factor de reacción,* h_o

Además conviene conocer

7) *mayor valor eficaz de la corriente que puede, sin peligro de deterioración, atravesar el aparato,* $I_{m.a.}$. Si el efecto perjudicial es de índole térmica, se referirá $I_{m.a.}$ a $0,1$ s.

8) *corriente y potencia de excitación* (para los aparatos con electroimán)

9) *dimensiones del espejo:* como el espejo es muy pequeño el brillo del spot puede no ser satisfactorio con el dispositivo usual del ectura.

Los datos $A1$ — $A5$ permiten, teóricamente, determinar el funcionamiento del aparato cualquiera que sean el circuito y la frecuencia f, pero el acuerdo entre la teoría y la práctica será mejor cuando f sea muy vecino o igual a f_o, como es en general el caso.

Si la zona Δf es ancha, es decir si el aparato está construído para funcionar satisfactoriamente bajo varias frecuencias, tal funcionamiento está teóricamente determinado por las posiciones $A2$ — $A6$ relativas a una frecuencia cualquiera f_o del intervalo Δf (dato $A1$), puesto que los datos que varían con la regulación, $S\mu A_{max}^{-1}$ y α_o, lo hacen en forma inversamente proporcional a f_o. Pero en realidad los coeficientes característicos del movimiento dependen en menor o mayor grado de la regulación del aparato, de

modo que puede ser necesario especificar la variación con f_o de parte o de la totalidad de las magnitudes $S\mu A_{max}^{-1}$, α_o (ya no más proporcionales a $1/f_o$), h_o, R_g y L_g.

En los aparatos con sistemas móviles intercambiables la discusión que precede vale para cada uno de estos sistemas, aunque conviene notar que las posiciones *A2* y *3* puden en determinados casos variar muy poco con el cambio de sistema.

En ciertos aparatos se puede ajustar A_o: es necesario entonces indicar los límites de la variación correspondiente de $S\mu A_{max}^{-1}$, α_o y h_o (*A4*—*6*). Por otra parte en algunos aparatos se puede hacer variar *g*; en los galvanómetros de cuadro móvil se indicarán los límites de la variación correspondiente de $S\mu A_{max}^{-1}$ y h_o (*A4* y *6*) y en los de imán los valores d R_g, L_g, $S\mu A^{-1}$, h_o e $I_{m.a.}$ (*A2*—*4*, *6*, *7*) relativos a las diversas bobinas intercambiables.

Recordemos que a partir de algunos de los datos precedentes se puede calcular

9) *sensibilidad práctica máxima por microvolt en corriente sinusoidal de frecuencia* f_o, $S\mu V_{max}^{-1}$

$$S\mu V_{max}^{-1} = \frac{S\mu A_{max}^{-1}}{R_g\, h_o}$$

10) *resistencia efectiva en un circuito en el cual* $f = f_o$, R'_g

$$R'_g = R_g\, h_o$$

11) *ancho de resonancia en funcionamiento bajo corriente de amplitud constante, a* °/o

$$a\,°/_o = \alpha_o \sqrt{3} \times 100$$

12) *sensibilidad práctica relativa, correspondiente a la armónica del orden n, en funcionamiento bajo corriente de amplitud constante*

$$\frac{S\mu A^{-1}{}_n}{S\mu A_{max}^{-1}} = \frac{2\,\alpha_o}{n^2 - 1}$$

13) *tiempo de retorno al cero*, $t_{r_{1o}}$ (ver el capítulo **VII, 10**)

$$t_{r_{1o}} = \frac{0{,}37}{\alpha_o f_o}$$

B. Datos de los catálogos y su crítica. Conclusiones.

Es muy poco frecuente encontrar todos los datos necesarios, y a veces abundan los datos superfluos. Se puede aceptar como

datos característicos de cada aparato (o de cada sistema móvil en los aparatos con sistemas móviles intercambiables) $\triangle f$ y las posiciones *A1 — 8*; si el aparato (o el sistema móvil) está destinado a trabajar en una ancha zona de frecuencias y no se puede admitir la constancia de las posiciones *A 2, 3, 6* y la variación de *A4* y *5* en forma inversamente proporcional a f_o, se especificará $\triangle f$, *A7* y *8* y la variación de *A2—6* en función de f_o. Con estas convenciones son superfluas las posiciones *A9 — 13* y deben suprimirse, aunque es cierto que algunas de las posiciones fundamentales *A2—8* pueden ser reemplazadas por otras elegidas en el grupo *A9 — 13*; así por ejemplo no hay inconveniente en adoptar bajo *A6 en vez de* h_3 la posición $S\mu V_{max}^{-1}$ (*A9*) o la R'_g (*A 10*).

C. Datos numéricos.

Ver los cuadros V y VI y la fig. 1 (leer $S\mu A_{max}^{-1}$ en vez de $S\mu A^{-1}$).

7. Galvanómetros de cuerda.

A. Datos requeridos.

1) *naturaleza y diámetro de la fibra*

2) *resistencia de la fibra,* R_g

3) *resistencia crítica,* R_c, o sus límites de variación en los aparatos cuya fibra es de tensión regulable

4) *período ideal fundamental,* T_{o1}, o sus límites de variación

5) *sensibilidad práctica en intensidad,* $S\mu A^{-1}$, o sus límites de variación

6) *grado de amortiguamiento de la vibración fundamental en circuito abierto,* α_{o1}, o sus límites de variación

7) *mayor corriente constante que el aparato puede soportar 0,1 s sin peligro de deterioración,* $I_{m.a.}$

8) *tensión y potencia de excitación* (en los aparatos con electroimán)

9a) *aumento del microscopio,* o

9b) *diámetro del espejo* según el dispositivo de observación adoptado.

A partir de $S\mu A^{-1}$ y de R_g, o eventualmente R_c, se puede deducir

10) *sensibilidad práctica por microvolt*

$$S\mu V^{-1} = \frac{S\mu A^{-1}}{R_g} \quad \text{o} \quad S\mu V^{-1} = \frac{S\mu A^{-1}}{R_c}$$

según la definición.

B. Datos de los catálogos y su crítica. Conclusiones.

No se indican nunca α_{ol} ni $I_{n.a}$; a veces falta también R_c (que podría reemplazarse por $\alpha_{c/cl}$); los otros datos están por lo general indicados correctamente. Se debería pues completar los datos con las posiciones *A3* (si falta), *A6* y *A7* y suprimir la posición *A10*, puesto que la sensibilidad práctica por microvolt, superflua, está invariablemente indicada.

Cierto catálogo indica la sensibilidad normal o el factor de mérito; es imprescindible suprimir esta magnitud, mal calculada y peor que inútil como hemos visto en el capítulo **VIII, 4**.

En aparatos con cuerda de tensión regulable hemos recomendado indicar solamente los límites de variación de R_c , T_{ol} , $S_{\mu A^{-1}}$ y α_{ol}; en efecto los valores intermedios son superfluos, dado que las relaciones $S_{\mu A^{-1}} = Cte.\ T_{ol}^2$ y $\alpha_{ol}\ w_{ol} = b_l = Cte.$ se cumplen prácticamente.

C. Datos numéricos.

Ver el cuadro VII y la fig. 1.

8. Galvanómetros de bucle.

A. Datos requeridos.

Con una sola excepción estos datos son los mismos que para el galvanómetro de cuadro móvil de índice óptico y escala separada: como la observación se hace con microscopio, se debe indicar su aumento *G*. Los valores de R_c, T_o, $S_{\mu A^{-1}}$ y α_o deben darse para las dos posiciones posibles del bucle: suspendido y apoyado.

B. Datos de los catálogos y su crítica. Conclusiones.

Los catálogos no indican nunca R_c, α_o, $I_{m.a.}$; a veces falta *G* y hasta $S_{\mu A^{-1}}$. Se completarán pues los datos en consecuencia; se suprimirá la sensibilidad práctica por microvolt.

C. Datos numéricos.

Ver el cuadro VIII y la fig. 1 ($S_{\mu A^{-1}}$ en div./mm).

9. Electrodinamómetros de índice óptico y escala separada.

A. Datos requeridos.

1) *mayor frecuencia a la cual el aparato puede ser correctamente empleado*, f_{max}

2) *resistencia del sistema fijo*, r_g

3) *coeficiente de self-inducción del sistema fijo,* l_g

4) *resistencia del sistema móvil,* R_g

5) *coeficiente de self-inducción del sistema móvil,* L_g

6) *corriente continua normal de excitación,* I_e

7) *sensibilidad práctica en intensidad en corriente continua, para la corriente normal de excitación,* $S \mu A^{-1}$

8) *período ideal,* T_o

9) *grado de amortiguamiento en circuito abierto,* α_o

10) *resistencia crítica,* R_c

11) *mayor corriente admisible sin peligro de deterioración durante 0,1* s *en el sistema móvil,* $I_{m.a.}$

B. Datos de los catálogos y su crítica. Conclusiones.

Los datos nunca son completos: faltan siempre f_{max}, α_o, R_c e $I_{m.a.}$, y a veces L_g y hasta T_o. En ocasiones figuran datos superfluos; así un catálogo indica además de la sensibilidad práctica en intensidad con excitación separada, relativa a la corriente de excitación I_e, la sensibilidad práctica en intensidad con autoexcitación, dato que se deduce del precedente (ver el capítulo **IX, 11**).

Sería útil no sólo completar los datos de primera categoría indicando f_{max}, α_o, R_c, $I_{m.a.}$ y, si faltan, L_g y T_o, sino también agregar algunos datos de segunda categoría. Los electrodinamómetros sin hierro son sensibles a los campos magnéticos parásitos de modo que interesa toda indicación *cuantitativa* de la eficacia de los dispositivos particulares adoptados para reducir la acción de dichos campos, a saber pantallas magnéticas o sistemas astáticos. También convendría disponer de datos relativos a la proporcionalidad de la desviación a la corriente y sobre la fijeza del cero y de las desviaciones, pudiéndose adoptar en este último sentido la sugestión expuesta en el parágrafo 3, a propósito de los galvanómetros de cuadro móvil de espejo y escala separada.

C. Datos numéricos.

Ver el cuadro IX y la fig. 1.

10. Electrodinamómetros de índice mecánico o de índice óptico corto, de longitud invariable.

A. Datos requeridos.

A los datos *A1 — A11* del parágrafo precedente se agregará:

12) *número de divisiones y posición del cero*

13) *longitud de la escala* o *valor en milímetros de una división*

14) *ángulo correspondiente a la desviación total* o *longitud del índice.*

B. Datos de los catálogos y su crítica. Conclusiones.

Los datos son incompletos; faltan f_{max}, L_g, α_o, R_c, $I_{m.a.}$ y la longitud del índice; se deben completar en consecuencia.

En los aparatos con órganos móviles intercambiables los datos *1, 4, 5, 7—11* deben, por supuesto, indicarse para cada órgano móvil.

C. Datos numéricos.

Ver el cuadro X y la fig. 1.

11. Aparatos de fuerza termoeléctrica.

1. Galvanómetro de Duddell.

A. Datos requeridos.

a) *aparatos de índice óptico y escala separada.*

1) *límite superior de la frecuencia de empleo determinado por la validez de la calibración efectuada en corriente continua,* f_{max}

2) *resistencias de los elementos calefactores,* r_c

3) *período ideal,* T_o

4) *sensibilidad práctica en intensidad* o mejor dicho sus límites para valores extremos de r_c. En los aparatos de desviación proporcional al cuadrado de la intensidad, la sensibilidad práctica en intensidad se define como la intensidad de corriente (en ampere, microampere etc.) que provoca una desviación de *d* mm, estando la regla a *1* m del espejo; se hace $d = 1$ mm, o $d = 10$ mm, o aún $d = 250$ mm. Nosotros, para mayor uniformidad con lo que precede, adoptamos su definición como la desviación debida a una corriente de $1 \mu A$ estando la regla a *1* m del espejo, $S_{\mu A^{-1}}$ (ver el capítulo **XI, 11**).

5) *grado de amortiguamiento,* α

6) *mayor corriente admisible durante 0,1* s *en el elemento calefactor,* $I_{m.a.}$.

b) *aparatos de índice mecánico.*

1, 2, 3, 5, 6) como los acabamos de indicar para el aparato de índice óptico y escala separada

4) *sensibilidad práctica en intensidad,* definida como la corriente que provoca la desviación de toda la escala

7) *número de divisiones*

8) *longitud de la escala*

9) *ángulo correspondiente a la desviación total* o *longitud del índice.*

B. Datos de los catálogos y su crítica. Conclusiones.

a) Faltan los valores de α, f_{max} e $I_{m.a.}$; en cambio figuran, como siempre, algunos datos superfluos. En efecto, si bien es necesario indicar los valores de las resistencias de los elementos calefactores disponibles, es inútil dar las sensibilidades relativas a cada uno de ellos porque la intensidad I que corresponde a una desviación d dada varía en razón inversa de la raíz cuadrada de r_c; basta pues (y hasta sobra) con indicar los valores extremos de la sensibilidad.

b) Faltan los valores de α, f_{max}, $I_{m.a.}$, de las longitudes de la escala y del índice y el número de divisiones.

C. Datos numéricos.

Ver el cuadro XI A.

II. Termopares.

A. Datos requeridos.

1) *límite superior de la frecuencia de empleo determinado por la validez de la calibración efectuada en corriente continua,* f_{max}.

2) *resistencia del elemento calefactor,* r_c

3) *resistencia del par,* R_p

4) *corriente normal,* I_n

5) *fuerza termoeléctrica* E_n *correspondiente a* I_n

6) *mayor corriente admisible durante* 0,1 s, $I_{m.a.}$ *y, eventualmente, menor corriente que provoca la fusión,* I_f

Si la fuerza termoeléctrica E no es prácticamente proporcional al cuadrado de la corriente I a medir, interesa que se indique $E = f(I_n/2)$ además de $E_n = f(I_n)$.

B. Datos de los catálogos y su crítica. Conclusiones.

Los datos de primera categoría están en general correctamente indicados; el valor de f_{max} no se conoce siempre sin embargo y el de $I_{m.a}$ se presenta sin indicación del tiempo durante el cual esta corriente puede tolerarse. Pocas veces figuran datos de segunda categoría, por ejemplo los que precisan la influencia de la temperatura ambiente sobre la fuerza termoeléctrica.

C. Datos numéricos.

Ver el cuadro XI B.

CUADRO I

Galvanómetros de cuadro móvil de espejo y de escala separada

Tipo o N.° del catálogo	Peso kg	δ mm	R_g Ω	R_a Ω	T_o s	$S_{\mu A^{-1}}$ mm./m.μA	α_u	$I_{n.a}$ μA
Cambridge Instrument Co, London - Inglaterra Catálogo: List N.° 167 y List N.° 163 A								
41142/1		8	25	155	6	110		
/2		8	150	aperiódico	6	260		
/3		8	400	aperiódico	6	550		
41661/1			10	aperiódico	2	2,5		
/2			1000	aperiódico	2	25		
/3			33	155	3,9	30		
41811/1		10	15	315	15	300		
/2		10	15	415	22	600		
/3		10	300	6300	22	4000		
/4		10	2800	59000	22	12000		
41127/		4 × 4 1)	35		1,5	180—300 2)		
/		4 × 4 1)	460		3,2	2350—3900 2)		
41147/			30	630	3,5	180		
/			150	2650	3,5	410		
/			400	6400	3,5	800		
41152			50	170	1,3	200		
41157/1		8	40		1,3	15		
/2		8	1000		1,3	170		

1) Espejo cuadrado.
2) Shunt magnético.

H. Tinsley & Co, London - Inglaterra Catalógo: List N.° 168, junio 1938								
4500 A 1)	1,2		10	160	2	140		
			50	850	2	300		
			140	1650	2	400		

1) Suspensión tensa; aparato sin nivel. Variación del cero menor de 1 mm para desviaciones angulares de cualquier sentido menores de ∼ 15°.

(Continúa)

(**Cuadro I**, continuación)

Leeds & Northrup Co, Philadelphia - Estados Unidos de Norteamérica Catálogo: E D 1939							
HS 2284 a	6,5	21	61	1,5	120		
" 2284 b	6,5	16	26	7	520		
" 2284 c		15	35	5	350		
" 2284 d		25	75	5	750		
" 2285 a	9,5	17	42	7,5	420		
" 2285 b	9,5	16	56	5	280		
" 2285 d	13	700	40700	27	14300		
" 2285 e	13	12	512	25	1300		
" 2285 f	9,5	800	70800	20	25000		
" 2285 g	9,5	500	10500	7	3330		
" 2290	9,5	800	100800	40	100000		
R 2500 a	13	12	62	5	125		
" 2500 b	13	500	10500	6	2000		
" 2500 c	13	40	340	5	200		
" 2500 e	13	500	2700	3	333		
" 2500 f	13	500	22500	14	10000		
" 2500 g	13	500	7500	6	2000		
P 2239 a	16	115	1)	8	70		
" 2239 b	16	1000	2)	14	1000		
" 2239 c	16	35	200	12	135		
" 2239 d	16	2000	12000	26	2070		
" 2239 e	16	60	290	24	350		
" 2239 f	16	8000	54000	18	5000		
Marine 2255 3)	9,5	270	100300	2	50		
2260 a	13	22	72	2	10		
2260 b	13	100	300	2	20		
2260 c	13	1350	6350	2	100		

Los sistemas móviles son intercambiables: para los aparatos 2285 *a*, *b* o *f*; los 2285 *d* o *e*; los 2260 *a*, *b* o *c*.
1) Se trabaja satisfactoriamente entre 10000 y 100000 ohm. ¿R_a = ?
2) Se trabaja satisfactoriamente entre 10000 y 25000 ohm. ¿R_a = ?
3) Suspensión tensa; aparato con electroimán, excitación 6V, 0,5 A.

P. J. Kipp & Zonen, Delft - Holanda Catálogo: Instruments scientifiqus, A.								
Moll "Original"		6	55	56—215	1,3 (?)	95—175		
A		5	340	2350—200300	7 (?)	5900—50000		

(Continúa)

B		5	340	1050—70350	3,5 (?)	1250—10000		
Moll (1)		5	25	26—225	2—5 (?)	200—2500		
Moll-Burger (2)				26	1,5 (?)	137		
		5	25	85	1,6—3,6 (?)	256—910		
				250	1,7—5,1 (?)	555—3330		
Za		8	7	8—57	1,3 (?)	40—143		
Zb		8	10	11—210	3 (?)	200—670		
Zc		8	15	30—415	7 (?)	830—2500		
Zd		8	25	105—2025	3 (?)	400—2000		
Ze		8	25	225—3025	7 (?)	2000—6700		
Moll "Micro"		3	20	21—75	0,2 (?)	25—40		
Balistique		10	100	200—1600	30 (?)	2220—8000		
Moll "MR"		8	80	81—230	2,5 (?)	48—77		

Todos los aparatos Kipp tienen shunt magnético.
Los sistemas móviles de los aparatos Za, Zb, Zc, Zd y Ze son intercambiables.

1) Aparato cuyo par director depende en parte del campo magnético principal.
2) Aparato cuyo par director depende en parte de un campo magnético auxiliar regulable independientemente.

Hartmann & Braun AG, Frankfort a. M. - Alemania
Catálogo: Tarif vert, 1928

150 I	3,4		50 (+50)	450	5 (25)	250	
II			5	5		25	
151 I	3,4		50 (+50)	350	1,5	125	
II			5	5		20	
155 I	3,4		700 (+300)	6700	5 (25)	665	
II			5	8		25	
158 I	3,4		700 (+9300)	700	8 (35)	1450	
II			5	10		50	
159	3,4		2200	202000	15	20000	
176	3,4		2,4	5,4	15	59	
591 I	2,8		100	600	4	250	
II			7	7		25	
172 I	3,4		50	400	5 (35)	145	
II			50	400		145	
173 I	3,4		300	1100	5 (28)	220	
II			300	1100		220	

(Continúa)

Los cuadros de todos los aparatos, excepto los 159 y 176, tienen 2 enrollamientos, I y II; los valores de la resistencia crítica de cada enrollamiento se entienden con el circuito del otro enrollamiento abierto. Los valores entre paréntesis en la columna de la resistencia interior corresponden a resistencias adicionales, en serie con el cuadro, ubicadas en el interior del galvanómetro. Los valores del período se entienden en circuito abierto; los valores entre paréntesis son los que se obtienen después de haber depositado una masa auxiliar sobre el cuadro con ayuda de una palanca que posee el aparato.

Siemens & Halske, Berlin, Siemensstadt - Alemania
Catálogo: Handliste Teil Vb, 1936

157001 I	2,8	8	480	6500—75500	8 (?)	4000—14300	
II			11	13,5—160		200—670	
157005	2,8	8	70 (+2000)	220—4070	7 (?)	310—1250	
157007	2,8	8	350 (+4000)	500—7700	4 (?)	310—1250	
157009	2,8	8	330 (+5000)	900—10000	2,5 (?)	330—1110	
157011	2,8	8	23 (+100)	24—253	3 (?)	59—200	
157025	2,7	5	8	9—30	0,5 (?)	7,7—13,3	
157050	2,4	15	50	800	7 (?)	200	
157055	4,1	14	350 (+150)	1550—∞	63	750—1250	
157057	4,1	14	25 (+25)	25—∞	63	60—100	

El cuadro del aparato 157001 es de dos enrollamientos, I y II. Todos los aparatos, excepto el 157050, tienen shunt magnético. Los valores entre paréntesis en la columna de la resistencia interior corresponden a resistencias adicionales, en serie con el cuadro, ubicadas en el interior del aparato. El sistema móvil del aparato 157005 se adapta al aparato 157007, así como el del aparato 157009 al 157011 y el del aparato 157055 al 157057.

Ateliers J. Carpentier, Paris - Francia
Catálogo: Galvanomètres

A1				1,8	1 (?)	0,16	
A4				6,2	3,5 (?)	2	
C5				103	12,8 (?)	50	
D6				1090	32 (?)	666	
F6				18000	25 (?)	2000	
G1			18	33	1,4 (?)	4	
G4			27	197	8,2 (?)	143	
H1			75	145	1,4 (?)	7,7	
H4			80	830	8,2 (?)	286	
I1			275	555	1,3 (?)	160	
I4			280	3080	8 (?)	590	
J1			1000	2200	1,3 (?)	31	
J4			1000	13000	8 (?)	1250	

Estos aparatos han sido seleccionados entre los indicados en el catálogo.

CUADRO II

Galvanómetros de cuadro móvil con índice óptico corto, de longitud invariable

Tipo o N.º del catálogo	Peso kg	R_g Ω	R_c Ω	T_o s	$S_{\mu A}^{-1}$ div./μA	α_o	$I_{m.a.}$ μA	Número de divisiones	Longitud de la escala mm	Longitud del índice mm
Cambridge Instrument Co, London - Inglaterra Catálogo: List N.º 163 A										
41159/1		40		1,3	5			1)		2 x 300
/2		1000		1,3	60			1)		
1) 1 división = 1mm										
Leeds & Northrup Co, Philadelphia - Estados Unidos de Norteamérica Catálogo: E D 1939										
2400 a 1)	2,7	300	10300	3	50			165—0—165	132	
b 1)	2,7	23	103	3	10			165—0—165	132	
c 1)	2,7	1000	16000	3	100			165—0—165	132	
2420 a 2)	2,3	300	10333	3	25			25—0—25	50	
b 2)	2,3	23	103	3	4			25—0—25	50	
c 2)	2,3	1000	16000	3	40			25—0—25	50	
d 2)	2,3	300	2300	3	25			25—0—25	50	
1) Lectura con anteojo; sistemas móviles intercambiables. 2) Sistemas móviles intercambiables.										
General Electric Co, Schenectady - Estados Unidos de Norteamérica Catálogo: Electric Instruments, GEA - 602 H, 1942										
32 C 230 G 1	2,3	13,6	13,6	3,5	6,7			40—0—40	80	
2	2,3	8,5	28,5	2	2,7			40—0—40	80	
3	2,3	6,1	18,1	1,5	1,3			40—0—40	80	
4	2,3	5,3	11,3	1	0,7			40—0—40	80	
32 C 231 G 1	2,3	20	160	3,5	13			40—0—40	80	
4	2,3	12	42	1	1,3			40—0—40	80	
32 C 232 G 1	2,3	58	760	3	27			40—0—40	80	
4	2,3	49	190	1	2,8			40—0—40	80	
32 C 233 G 1	2,3	180	2680	3	50			40—0—40	80	
4	2,3	171	720	1	5			40—0—40	80	
32 C 235 G 1	2,3	710	10700	3	105			40—0—40	80	
4	2,3	700	2600	1	10,5			40—0—40	80	
32 C 236 G 1	2,3	2280	50300	4	222			40—0—40	80	
2	2,3	2280	28300	2,3	91			40—0—40	80	
3	2,3	2280	19300	1,7	45			40—0—40	80	
4	2,3	2280	14300	1,2	23			40—0—40	80	
32 C 240 G 1 1)	5,6	13,6	43,6	3,5	36			50—0—50	100	
2 1)	5,6	8,5	28,5	2	14			50—0—50	100	
3 1)	5,6	6,1	18,1	1,5	7,2			50—0—50	100	
4 1)	5,6	5,3	11,3	1	3,6			50—0—50	100	
32 C 241 G 1 1)	5,6	20	160	3,5	67			50—0—50	100	
4 1)	5,6	12	42	1	6,7			50—0—50	100	
32 C 242 G 1 1)	5,6	58	760	3	143			50—0—50	100	
4 1)	5,6	49	190	1	15			50—0—50	100	
32 C 243 G 1 1)	5,6	180	2680	3	270			50—0—50	100	
4 1)	5,6	171	720	1	28			50—0—50	100	
32 C 245 G 1 1)	5,6	710	10700	3	555			50—0—50	100	
4 1)	5,6	700	2600	1	56			50—0—50	100	
32 C 246 G 1 1)	5,6	2280	50300	4	1250			50—0—50	100	
2 1)	5,6	2280	28300	2,3	500			50—0—50	100	
3 1)	5,6	2280	19300	1,7	250			50—0—50	100	
4 1)	5,6	2280	14300	1,2	125			50—0—50	100	
No se indicaron las características de los aparatos 32 C 231 G 2 y 3, 32 C 232 G 2 y 3, 32 C 233 G 1 y 3, 32 C 235 G 1 y 3, 32 C 241 G 2 y 3, 32 C 242 G 2 y 3, 32 C 243 G 2 y 3, 32 C 245 G 2 y 3; están comprendidas entre las de los aparatos G 1 y 4 respectivos. - Los sistemas móviles son intercambiables. 1) La escala está también marcada de 0 a 100. Aparatos con amplificación óptica.										
Siemens & Halske, Berlin - Siemensstadt - Alemania Catálogo: Galvanomètre à repère lumineux										
13818	3	9+1 1)		2—3 ?	1			0—100		
13819	3	12+100 1)		2—3 ?	5			0—150		
13820	3	100+1000 1)		2—3 ?	10			0—100		
13821 a	3	22+1200 1)		2—3 ?	33			0—150		
13823	3	500+10000 1)		2—3 ?	50			0—150		
13824	3	1850+100000 1)		2—3 ?	100			0—100		
1) El primer número corresponde a la resistencia del sistema de medida, el segundo a una resistencia adicional contenida en el aparato. La resistencia entre los bornes es la total.										

CUADRO III

Galvanómetros de cuadro móvil con índice mecánico

Tipo o N.° del catálogo	Peso kg	R_g Ω	R_c Ω	T_o s	$S_{\mu A}^{-1}$ div./μA	α_o	$I_{n.a.}$ μA	Número de divisiones	Longitud de la escala mm	Longitud del índice mm
Cambridge Instrument Co, London - Inglaterra Catálogo: List N.° 162, 163 A y 167.										
41311/1	1,1	5		3	0,1			35—0—35	80	
/2	1,1	10		3	0,15			35—0—35	80	
/3	1,1	50		3	0,3			35—0—35	80	
/4	1,1	1000		3	1,5			35—0—35	80	
41315/1	0,2	40		3	0,025			20—0—20		
/2	0,2	500		3	0,1			20—0—20		
41321/1	1,3	5		4	0,28			10—0—100	75	
/2	1,3	10		4	0,42			10—0—100	75	
/3	1,3	50		4	0,83			10—0—100	75	
/4	1,3	10+40 1)		4	0,42			10—0—100	75	
/5	1,3	10+90 1)		4	0,42			10—0—100	75	
/6	1,3	10+490 1)		4	0,42			10—0—100	75	
/7	1,3	1000		4	4,2			10—0—100	75	
41331/1	2	5		4	0,33			0—120	120	
/2	2	10		4	0,5			0—120	120	
/3	2	50		4	1			0—120	120	
/4	2	10+40 1)		4	0,5			0—120	120	
/5	2	10+90 1)		4	0,5			0—120	120	
/6	2	10+490 1)		4	0,5			0—120	120	
/7	2	1000		4	5			0—120	120	
41338/1	1,8	10		4	1,2			0—120	120	
/2	1,8	1000		4	12			0—120	120	
41339/1	1,8	10		4	2			0—120	120	
/2	1,8	1000		4	20			0—120	120	
41341/1	6	10		4	0,5			0—150	170	
/2	6	50		4	1			0—150	170	
/3	6	10+40 1)		4	0,5			0—150	170	
/4	6	10+90 1)		4	0,5			0—150	170	
/5	6	10+490 1)		4	0,5			0—150	170	
/6	6	1000		4	2			0—150	170	
/7	6	350		4	5			0—150	170	
/8	6	1700		4	10			0—150	170	
41172/1	0,7	1,3		1?	0,0033			0—120	80	
/2	0,7	200		1?	0,12			0—120	80	
/3	0,7	250		4?	0,48			0—120	80	
12151/1	3,9	70		12	15—10			0—150	165	
/2	3,9	1000		12	25			0—150	165	
12111/1	4,9	19		4	1,5			0—150	165	
/2	4,9	34		4	1,2			0—150	165	

1) El primer valor representa la resistencia del cuadro, el segundo la resistencia adicional; la resistencia entre bornes es la total.

Tipo o N.° del catálogo	Peso kg	R_g Ω	R_c Ω	T_o s	$S_{\mu A}^{-1}$ div./μA	α_o	$I_{n.a.}$ μA	Número de divisiones	Longitud de la escala mm	Longitud del índice mm
Leeds & Northrup Co, Philadelphia - Estados Unidos de Norteamérica Catálogo: E D 1939										
2310 a 1)	1,8	12	32	2,5	0,5			15—0—15	30	
b 1)	1,8	25	135	3	1			15—0—15	30	
c 1)	1,8	250	2050	3	4			15—0—15	30	
d 1)	1,8	1000	11000	3,5	8			15—0—15	30	
e 1)	1,8	16	46	4,5	1			15—0—15	30	
2320 a	0,9	20	70	3	0,2			15—0—15	30	
b	0,9	20	70	3	0,25			15—0—15	30	
c	0,9	250	1200	3	1			15—0—15	30	
d	0,9	1000	3400	3	2			15—0—15	30	

1) La escala del aparato está inclinada 45° sobre el plano horizontal.
Los sistemas móviles de los aparatos 2310, así como los de los aparatos 2320, son intercambiables.

(Continúa)

(**Cuadro III**, continuación)

General Electric Co, Schenectady - Estados Unidos de Norteamérica
Catálogo: Electric Instruments, G E A - 602 H

32 C 200 G 1	0,7	13,3	31	4,5	1			15—0—15	36	
2	0,7	8,2	17	3	0,4			15—0—15	36	
3	0,7	6,2	11	2	0,2			15—0—15	36	
4	0,7	4,9	7	1,5	0,1			15—0—15	36	
32 C 201 G 1	0,7	20	120	4	1,9			15—0—15	36	
4	0,7	12	35	1,5	0,2			15—0—15	36	
32 C 202 G 1	0,7	55	655	4	4			15—0—15	36	
4	0,7	47	147	1,5	0,4			15—0—15	36	
32 C 203 G 1	0,7	180	2680	4,5	7,7			15—0—15	36	
4	0,7	171	670	1,5	0,8			15—0—15	36	
32 C 205 G 1	0,7	700	10700	4	15,6			15—0—15	36	
4	0,7	700	2300	1,5	1,6			15—0—15	36	
32 C 206 G 1	0,7	2200	32200	4,5	33			15—0—15	36	
2	0,7	2200	22200	3	13,3			15—0—15	36	
3	0,7	2200	17200	2	6,7			15—0—15	36	
4	0,7	2200	12200	1,5	3,3			15—0—15	36	

El sistema móvil de estos aparatos es intercambiable.
No se indicaron las características de los aparatos 32 C 201 G 2 y 3, 32 C 202 G 2 y 3, 32 C 203 G 2 y 3, 32 C 205 G 2 y 3; estan comprendidas entre las de los aparatos G 1 y 4 respectivos.

Weston Electrical Instrument Corp., Newark-Estados Unidos de Norteamérica
Catálogo: N.° 12 A, 1939

440	1,25	4000	64000	2,7 ?	20			30—0—30	60	
	1,25	1000	12500	2,7 ?	10			30—0—30	60	
	1,25	150	1150	2,7 ?	4			30—0—30	60	
	1,25	50	200	2,7 ?	2			30—0—30	60	
	1,25	3,5	14	2,7 ?	0,45			30—0—30	60	
375		23			0,045			30—0—30	60	
699		125			0,5			30—0—30	60	

P. J. Kipp & Zonen, Delft - Holanda
Catálogo: Instruments scientifiques, A.

A 38 1)		10		7 ?	1			0—100	130	100

1) El aparato trae también la graduación 50—0—50; su número es entonces A 39.

Hartmann & Braun, Frankfurt a. M. - Alemania
Catálogo: Tarif vert, 1928

210	0,95	150	210	1,2	0,3			30—0—30	60	
211	0,95	4	7	2,4	0,2			30—0—30	60	
187	2,7	85	385	2,6	1			10—0—140	150	
212	1,1	270	770	6	3,8			30—0—30	60	
216	1,1	4,5	7	6	0,4			30—0—30	60	
192 { I / II 1)	3,3	50 5	950 5	14	15,4 1,2			70—0—70	154	
198 { I / II 1)	3,4	500 5	3500 10	12 (30)	25 1,2			5—0—130	148	

Los valores del período de todos los aparatos son en circuito abierto; el valor entre paréntesis del aparato 198 es el que se obtiene después de haber depositado una masa auxiliar sobre el cuadro, con ayuda de una palanca que posee el aparato.

1) Aparatos con cuadros de dos enrollamientos.

Siemens & Halske, Berlín, Siemensstadt - Alemania
Catálogo: 1933, partie V.

13801	0,2	10	1)		0,02			15—0—15		
13802	0,2	100	1)		0,07			15—0—15		
13803	1,5	1,5	2,5		0,1			25—0—25		
13804	1,5	100	175		1			25—0—25		

(Continúa)

(**Cuadro III,** Continuación)

13805	1,5	650	1650		4			25—0—25		
13806	0,8	22	35		0,2			40—0—40		
13807	0,8	80	380		0,8			40—0—40		
13811	2,2	250	350		2,5			0—150		
13812	2,2	750	1050		4			0—200		
13814	2,5	15 (+135) [2]	150		1,7			75—0—75		
13815	2,5	750	1550	4,5	6,7			0—200		
13816	2,5	700	7700		33			0—200		

1) $\alpha_{c/c} < 1$

2) El valor entre paréntesis corresponde a una resistencia auxiliar en serie con el cuadro.

Chauvin - Arnoux, Paris - Francia

à suspension élastique /		5			0,33			0—100		
/		120			1,33			0—100		
/		800			5			0—100		
A P 33 /		3			0,005			0—100		
/		100			1			0—100		
/		1200			10			0—100		
A C C 34 /		4			0,1			0—100		
/		80			1			0—100		
/		2500			20			0—100		
Bipivots /		20			20			25—0—25		
/		100			8			25—0—25		
/		2000			1,5			25—0—25		

Trüb, Täuber & Co, Zürich - Suiza

Catálogo: Lista N.° 92

Pg 60800	1,5	100			0,2			20—0—20		95

Se construye también un galvanómetro diferencial del mismo tipo, Pg 60801.

CUADRO IV

Galvanómetros de imán móvil

Tipo o N.° del catálogo	Peso kg	Dimensiones del espeio mm	R_g Ω	$a_{c/c}$	T_o s	$S_{\mu A}{}^{-1}$ mm/m.μA	α_o	$I_{m.a.}$ μA
Cambridge Instrument Co, London - Inglaterra Catálogo: List N.° 167 y List N.° 163 A								
Paschen 41214 1)	8	1,5 × 1,5	12		0,5 - 6	100—14600		
" 41211 1)	8	1,5 × 1,5	3000		0,5 - 6	915—132000		
41246/1 2)	5,6	2,5 × 2,5	20		? —6	? —1200		
/2 2)	5,6	2,5 × 2,5	100		? —6	? —2260		
/3 2)	5,6	2,5 × 2,5	1000		? —6	? —5700		
41241/1 3)	1	2,5 × 2,5	10		? —7,5	? —1400		
/2 3)	1	2,5 × 2,5	100		? —7,5	? —3500		
/3 3)	1	2,5 × 2,5	1000		? —7,5	? —9000		

Todos los aparatos son astáticos, con T_o y $S_{\mu A}{}^{-1}$ regulables. El espejo es cuadrado.

1) Aparatos de 4 bobinas con pantallas magnéticas; R_g y $S_{\mu A}{}^{-1}$ corresponden a las bobinas en serie.

2) Aparato de 2 bobinas con pantallas magnéticas; R_g y $S_{\mu A}{}^{-1}$ corresponden a las bobinas en serie.

3) Como el aparato del tipo 41246 pero sin pantallas magnéticas.

Tipo o N.° del catálogo	Peso kg	Dimensiones del espeio mm	R_g Ω	$a_{c/c}$	T_o s	$S_{\mu A}{}^{-1}$ mm/m.μA	α_o	$I_{m.a.}$ μA
Leeds & Northrup Co, Philadelphia - Estados Unidos de Norteamérica Catálogo: E D 1939								
Coblentz 2270			40		5	5000		

Aparato de 4 bobinas, astático, con pantallas magnéticas; R_g y $S_{\mu A}{}^{-1}$ corresponden a las bobinas en serie.

CUADRO V

Galvanómetros de resonancia de imán móvil y de cuerda

La columna $S\mu V_{max}^{-1}$ ha sido incluída para los casos en que los catálogos traen $S\mu A_{max}^{-1}$ y $S\mu V_{max}^{-1}$ pero no R_g ni h_o.

Tipo o N.º del catálogo	Peso kg	δ mm	Δf Hz	f_o Hz	R_g Ω	L_g H	$S\mu A_{max}^{-1}$ mm/m.μA	α_o	h_o	$S\mu V_{max}^{-1}$ mm/m.μV	$I_{m.a}$ μA	Excitación U V	Excitación I A
Galvanómetros de imán móvil													
Cambridge Instrument Co, London - Inglaterra Catálogo: List N.º 162													
Schering-Schmidt 41531	23,6		25—120	25 50 75 100 120			47 40 29 22 18					12	0,04 0,12 0,34 0,45 0,65
Hartmann & Braun, Frankfort a. M. - Alemania Catálogo: Tarif vert, 1928													
Schering-Schmidt 379 1)	3,9		10—75 30—160	10 25 50 75 30 50 100 150	70	0,6 0,1	14 20 6,6 3,3 5 10 5 2					12,5	0,25
1) Aparato con dos sistemas móviles, intercambiables, uno para 10—75 Hz, otro para 30—160 Hz.													
Siemens & Halske, Berlin, Siemensstadt - Alemania Catálogo: Vb, 1936													
Schering-Schmidt													
157081	2		15—60		41	0,25	150—45					2	0,03
157082	2		40—80		41	0,25	200—90					2	0,03
157083	1,5		15—25				150—100					imán	
157084	1,5		50 ± 5	50			65					imán	
El sistema móvil del aparato 157081 se adapta al aparato 157082; el del aparato 157083 al 157084.													
E. Leybold's Nachfolger A. G., Köln - Bayental - Alemania Catálogo: Sonderliste 6.													
Meissner-Adeberger				50			500			1,25			
El aparato puede equiparse con dos sistemas móviles: uno para 15—400 Hz, otro para 400—750 Hz. La desviación se mantiene constante para una variación de frecuencia de 10—15 Hz.													
Allgemeine Elektrizität's Geselschaft, Berlin - Alemania													
Rump A			30—100				350—96	0,008— —0,003		3,7—1			
B			10—60				480—86	0,03— —0,005		5,1—0,8			
C			50 ± ?	50			785	0,0055		7,4			
Trüb - Täuber, Zürich - Suiza													
VS 035001			50 ± 0	50	180	1,3	100	0,005				imán	
VST 035007	6		50 ± 10	50			30					imán	
Se suministran también sistemas móviles para 25 Hz. Los aparatos son de imán director; R_g y L_g del aparato VS corresponden al acoplamiento en serie de las dos bobinas que comprende.													
Galvanómetros de cuerda													
P. J. Kipp & Zonen, Delft - Holanda Catálogo: Instruments scientifiques													
Moll, A 40			100 - 2500	250 1000 2000	30		30 3,5 2					4	1

CUADRO VI

Galvanómetros de resonancia de cuadro móvil

Tipo o N.º del catálogo	Peso kg	δ mm	$\triangle f$ Hz	f_o Hz	R_g Ω	L_g H	$S\mu A_{max}^{-1}$ mm/m.μA	α_o	h_o	$I_{m.a.}$ μA
Cambridge Instrument Co, London - Inglaterra Catálogo: List N.º 162 y 163 A										
Campbell										
41521/1 1)	5,5		10—100				90—190—6			
/2	5,5		20—200				100—180—2			
/3	5,5		30—300				70—154—4			
				100			63	0,0015	67	
/4	5,5		60—600	300	20		21		51	
				500			7,5		34	
				600			3,5		20	
/5	5,5		200—1200				23—1			
41501/ 2)	0,35			50±5			90			
/				100±15			60			
/				800±15			1,5			
/				1000±15			0,8			

1) Los cuadros son intercambiables.
2) El aparato puede suministrarse con un dispositivo de regulación a distancia de la tensión del hilo.

Tipo o N.º del catálogo	Peso kg	δ mm	$\triangle f$ Hz	f_o Hz	R_g Ω	L_g H	$S\mu A_{max}^{-1}$ mm/m.μA	α_o	h_o	$I_{m.a.}$ μA
Leeds & Northrup Co, Philadelphia - Estados Unidos de Norteamérica Catálogo: E D 1939										
2350 a			55—75	60	800		40	0,0015		
2350 b 1)			55—75	60	0,25			0,0015		

Los aparatos pueden suministrarse con un dispositivo de regulación a distancia de la tensión del hilo.

1) $S\mu V_{max}^{-1} = 0{,}5$ mm/m. μV.

Tipo o N.º del catálogo	Peso kg	δ mm	$\triangle f$ Hz	f_o Hz	R_g Ω	L_g H	$S\mu A_{max}^{-1}$ mm/m.μA	α_o	h_o	$I_{m.a.}$ μA
Hartmann & Braun, Frankfort a. M. - Alemania Catálogo: Tarif vert 1928										
				25			33,3			
	7		25—125	50	15		14,3			
540				100			12,5			
				200—300			10			
	5,4		125—3000	300—600	50		1			
				600—2000			0,1			
				2000—3000			0,01			

Los bucles de 25—125 Hz y 125—3000 Hz son intercambiables.

Tipo o N.º del catálogo	Peso kg	δ mm	$\triangle f$ Hz	f_o Hz	R_g Ω	L_g H	$S\mu A_{max}^{-1}$ mm/m.μA	α_o	h_o	$I_{m.a.}$ μA
Chauvin - Arnoux, Paris - Francia										
			20—100	50	600		60			

CUADRO VII

Galvanómetros de cuerda

Tipo o N.º del catálogo	Peso kg	Cuerda Naturaleza	d μm	R_g Ω	R_c Ω	T_{o1} s	$S\mu A^{-1}$	α_{o1}	I_{ma} μA	Excitación U V	P W	G	Dimensiones del espejo mm
Cambridge Instrument Co, London - Inglaterra Catálogo: List N.º 167													
Einthoven 53113	30	cuarzo dorado	2	6000		0,0036—0,008	2—50			220	40	600	—
		" "	3	4000		0,004—0,01—	2—50—			110		600	
						— aperiódico	—60000			24			
										o12			
		" "	5	1400		0,0044—0,02	2—50					600	
		" "	5	4000		0,02	200					600	
		platino	12	125		0,0035—0,02	0,1—3,3					600	
		cobre	12	12		0,002—0,1	0,1—2,5					600	
41434	4,5	cobre	12	10		0,0015—0,0035	0,001—0,01					40	—
El aparato N.º 41434 es de imán permanente y tiene dos fibras regulables separadas.													
P. J. Kipp & Zonen, Delft - Holanda Catálogo: Instruments scientifiques, A.													
Moll-Van Dyck TSA		1)	1)	8,5 2)	1 3)	0,02	2,5			8	16	—	8×15
					50		3,6						
					100		5						
					∞		6						
TSB		1)	1)	5 2)	1 3)	0,01	1,2			8	16	—	8×15
					50		1,8						
					100		2,1						
					∞		2,3						

Espejo rectangular. Los sistemas móviles, de 0,02 s y 0,01 s respectivamente, son intercambiables. Estos aparatos se fabrican con imán permanente y shunt magnético, pero en tal caso sus sistemas móviles no son intercambiables.

1) Interesan los datos relativos a la cuerda propiamente dicha y a la semi-espira soldada a ésta.

2) El valor indicado se entiende entre bornes; interesa conocer las resistencias de la cuerda y de la semi-espira por separado.

3) Los valores de esta columna son los de la resistencia del circuito exterior que hace $\alpha = 1$.

CUADRO VIII

Galvanómetros de bucle

Tipo o N.° del catálogo	Peso kg	G	R_g Ω	R_c Ω	T_o s	$S_{\mu A^{-1}}$ div/μA	α_o	$I_{m.a.}$ μA
C. Zeiss, Jena - Alemania Catálogo: Galvanómetros de bucle								
Mechau Bucle de cinta s a	6,5	840	4—8		0,2 0,6	27 133		
Bucle de hilo	6.5		14—24		0,02			
s — bucle suspendido; a — bucle apoyado.								
E. Leybold's A. G., Köln - Bayental - Alemania Catálogo: Sonderliste 6.								
Deubner			5		0,2	10		

CUADRO IX

Electrodinamómetros de índice óptico y escala separada

Tipo o N.º del catálogo	Peso	δ	f_{max}	sistema fijo		sistema móvil		I_e	$S\mu_A^{-1}$	T_o	α_o	R_c	$I_{m.a.}$
				r_g	l_g	R_g	L_g						
	kg	mm	Hz	Ω	H	Ω	H	A	mm/m.μA	s		Ω	μA
Leeds & Northrup Co, Philadelphia - Estados Unidos de Norteamérica Catálogo: E. D. 1939													
2570		9,5		110	2,9	18		0,1	290	10			
2440				125	0,11	200	0,015	0,1	20	10			
2450		13		25	0,012	35	0,005	0,1	2	8			
El aparato 2570 es de núcleo de hierro; los aparatos 2440 y 2450 son astáticos.													
Hartmann & Braun, Frankfurt a. M. Alemania Catálogo: Tarif vert, 1928													
378 a I	5,3			1000	0,8	500	0,025	0,03	500				
378 a II	5,3			100	0,08	50	0,0025	0,1	167				
378 a III	5,3			8	0,008	8	0,00025	0,3	83				
Los aparatos tienen una pantalla magnética de hierro subdividido.													

CUADRO X

Electrodinamómetros de índice mecánico o de índice óptico corto, de longitud invariable

Tipo o N.° del catálogo	Peso kg	f_{max} Hz	sistema fijo r_g Ω	l_g H	sistema móvil R_g Ω	L_g H	I_e A	$S\mu_A^{-1}$ div./µA	T_o s	α_o	R_c Ω	$I_{m.a.}$ µA	Número de divisiones	Longitud de la escala mm	Longitud del índice mm
Leeds & Northrup Co, Philadelphia - Estados Unidos de Norteamérica Catálogo: E. D. 1939															
2460	2,8		20	0,0033	200	0,0033	0,1	0,1	3				25—0—25	50	
2370 a	2,8		27,5	0,28	20		0,5	0,2	2,6				15—0—15	30	
2370 b	2,8		27,5	0,28	50		0,5	1	2,6				15—0—15	30	
2370 c	2,8		27,5	0,28	1000		0,5	2	2,6				15—0—15	30	

El aparato 2460 es astático y de índice luminoso corto. Los aparatos 2370 a, 2370 b y 2370 c, de índice mecánico, tienen sus sistemas móviles intercambiables.

CUADRO XI

Aparatos de fuerza termoeléctrica

A. Galvanómetro de Duddell

a) Aparatos de índice óptico y escala separada

Tipo o N.º del catálogo	Peso kg	δ mm	f_{max} MHz	r_c Ω	T_o s	$S\mu_A^{-1}$ mm/m.1 μA	α	$I_{m.a.}$ μA
Cambridge Instrument Co, London - Inglaterra Catálogo: List N.º 162 y 163 A								
41611 [1]	10,3			100 4	3–4	0,0028 0,00011	~ 1	

1) Se fabrican también los elementos calefactores, intercambiables, de $r_c = 1000, 400, 40, 10$ y $1\ \Omega$.

b) Aparatos de índice mecánico

Tipo o N.º del catálogo	Peso kg	f_{max} MHz	r_c Ω	T_o s	I de plena desviación mA	α	$I_{m.a.}$ mA	Número de divisiones	Longitud de la escala mm	Longitud del índice mm
Cambridge Instrument Co, London - Inglaterra Catálogo: List N.º 162										
41631	4,5		150		10			0—1,0—1,5—2,0 a 10,0 [1]	145	120
41633	4,5		1,5		100			0—10—15—20 a 100 [1]	145	120

1) Escala cuadrática; de 2,0 a 10,0 y 20 a 100 graduada en décimos de división y en divisiones respectivamente.

(Continúa)

B. Termopares

Tipo o N.º del catálogo	Peso kg	f_{max} MHz	r_c Ω	R_p Ω	I_n mA	E_n mV	$I_{m.a.}$ mA
Cambridge Instrument Co, London - Inglaterra Catálogo: List N.º 163 A							
41670 1)			1600	13	1,25	6	2,5
41676 1)			400	8	2,5	6	5
41677 1)			90	8	5	6	10
41671 1)			30	8	10	6	20
41672 1)			12	4	25	6	50
41678 1)			4	4	50	6	100
41673 1)			1	4	150	6	300
41679 1)			0,4	4	500	6	1000
41675 1)			0,32	4	700	6	1100
41674 1)			0,2	4	1000	6	1500
41681 2)			20	15	37	6	100
41682 2)			10	15	37	6	170
41683 2)			3	15	130	6	280
41684 2)			1	15	220	6	500
41685 2)			0,4	15	330	6	1000

1) Elementos en el vacío.
2) Elementos de 10 pares en serie, de distancia regulable entre el calefactor y los pares; la sensibilidad indicada es la máxima.

Tipo o N.º del catálogo	Peso kg	f_{max} MHz	r_c Ω	R_p Ω	I_n mA	E_n mV	$I_{m.a.}$ mA
Weston Electrical Instrument Corp., Newark - Estados Unidos de Norteamérica Catálogo: N.º 12 A, 1939							
					1,5		
					2		
					5		
					7,5		
					10		
					20		
					50		
					100		
					150		
					200		
					300		
					500		

Elementos en el vacío.

(Continúa)

General Electric Co, Schenectady-Estados Unidos de Norteamérica Catálogo: Electric instruments, 1942							
91 X 531		60 1)	800	14	1,3–2,9	5–15	4 (30)
91 X 532		60 1)	400	14	2–4,5	5–15	8 (100)
91 X 533		60 1)	40	12	5,5–10	5–15	20 (40)
91 X 534		60 1)	14	10	13–25	5–15	40 (100)
91 X 535		60 1)	5	5	25–50	5–15	100 (275)
91 X 536		60 1)	2,5	5	55–110	5–15	200 (450)
91 X 537		60 1)	1	5	125–250	5–15	400 (900)

Elementos en el vacío.
Los valores de las columnas I_n mA y E_n mV se corresponden respectivamente. Los valores entre paréntesis en la columna $I_{m.a.}$ mA son los de la intensidad de fusión.
El cambio relativo de la f.e.m. con la temperatura ambiente es inferior a 0,2 % por 1° C. El coeficiente medio de temperatura de la resistencia de los hilos del par es 9.10^{-5} por 1° C.
1) A esta frecuencia el error es de 2 %.

Siemens & Halske, Berlin - Siemensstadt, Alemania Catálogo: V, 1933							
13826	0,3		65	30	10	16	10
13829	0,3		15	20	10	5	20
13830	0,3		1,5	20	50	4	100

Elementos en el vacío.

Hartmann & Braun, Frankfort a. M., Alemania Catálogo: Tarif vert 1928							
331	0,6		100	100	7	17	7
332	0,6		2	30	150	17	150

Elementos en el vacío, montados en forma de puente.

Anexo: CUADRO XII

Fluxímetros de índice mecánico o de índice óptico de longitud invariable

Tipo o N.º del catálogo	Peso kg	R_f Ω	$\tau_o = \frac{1}{2 b_o}$ s	$\tau_{c/c} = \frac{1}{2 b_{c/c}}$ s	Sensibilidad práctica Mx/div.	Número de divisiones	Longitud de la escala mm	Longitud del indice mm
Cambridge Instrument Co, London - Inglaterra Catálogo: List N.º 165 A, 175 y supplement to 175								
41130 1)					10000	120	150	
41139 2)					3000	250	500	

1) Aparato de índice mecánico.
2) Aparato de escala transparente móvil y amplificación óptica; la longitud indicada es la de la imagen de la escala.

NOTA. — Si el par director del aparato es apreciable, se indicará T_o, α_o y $\alpha_{c/c}$ en vez de las constantes de tiempo τ_o en circuito abierto y $\tau_{c/c}$ en corto-circuito, relativas a descargas prácticamente instantáneas.

El conocimiento de τ_o y $\tau_{c/c}$, además de dar una idea sobre la rapidez de las lecturas, permite verificar si en el circuito dado, de resistencia R, el amortiguamiento en circuito abierto es despreciable frente al electromagnético: esto se cumple cuando

$$\frac{R}{R_f} << \frac{\tau_{c/c}}{\tau_o - \tau_{c/c}}$$

FE DE ERRATAS PROVISORIA

Página			
51	fórmula (152)	leer:	$v_o = -\left(\frac{d\Theta_t}{dt}\right)_{t=0} = -\Theta_m\,\Omega\cos(\varphi+\psi)$
	figura 20	leer:	$x = 0{,}95$ en vez de $x = 1{,}05$
	línea 5 desde abajo	leer:	$x = 0{,}95$ en vez de $x = 1{,}05$
67	fórmula (13)	leer:	$tg\,\Theta = \frac{I(M_1 G_1 - M_2 G_2 \cos\gamma)}{M_r H_t - M_2 G_2 I \operatorname{sen}\gamma}$
81	línea 1 desde arriba	leer:	... del circuito del cuadro,... en vez de ... del cuadro, ...
101	fórmula (10)	leer:	$\frac{\Theta}{I} = \frac{g}{C}$
106	línea 3 desde abajo	leer:	... está a 1 m. ... en vez de... está a m. ...
115	fórmula (38)	leer:	$S_t = ...$ en vez de $S_i = ...$
120	línea 13 desde abajo	leer:	o $R_{ce} \cong R_e$ ... en vez de a $R_c \cong R_e$ ...
127	línea 11 desde arriba	leer:	... resistencia R_e del en vez de ... resistencia R_e
195	fórmula entre las líneas (4) y (5) desde abajo	leer:	$\alpha = \alpha_o + \frac{\Phi_o^2}{2R\sqrt{KC}} \cong \frac{\Phi_o^2}{2R\sqrt{KC}}$
248	línea 3 desde arriba	leer:	... $\psi = 0$ en vez de ... $\psi = \pi$
255	fórmula (46)	leer:	$h_o = 1 + \frac{g^2}{A_o R_g} = \frac{S_{ia\,max}}{S_{Va\,max} R_g}$

INDICE

